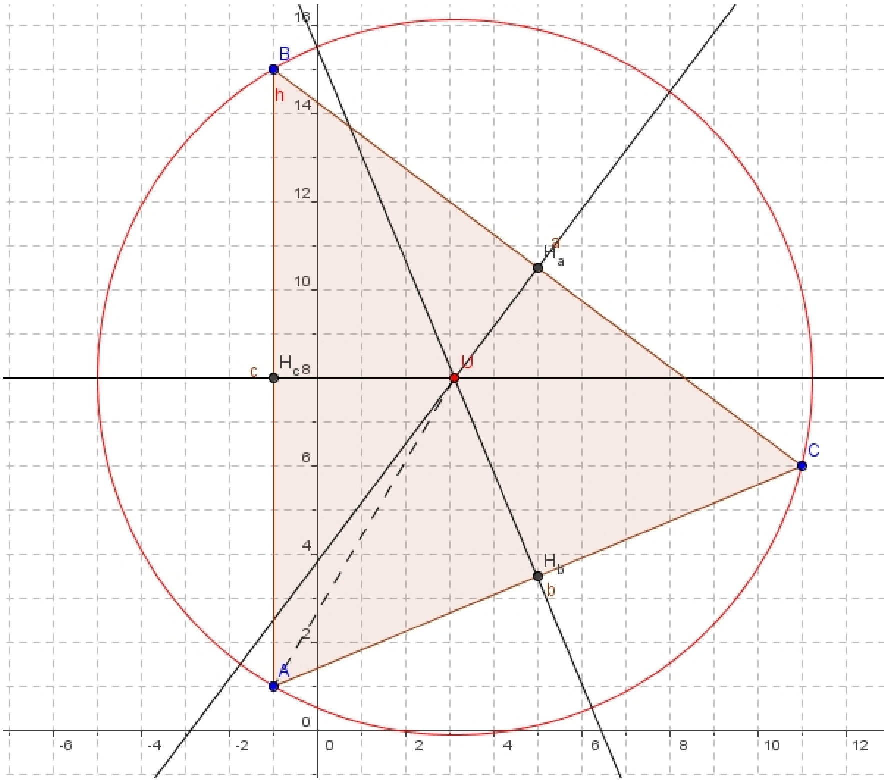
Berechnen der besonderen Punkte eines Dreiecks

Gruppenrallye – Lösungen

Gegeben ist ein Dreieck ΔABC mit $A=(-1|1), B(-1|15), C(11|6)$.

Beispiel A – Lösung:

Zeichnung – Umkreismittelpunkt – Umkreisradius



Der Umkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Seitensymmetralen. Der Umkreisradius ist der Abstand vom Umkreismittelpunkt zu einem Eckpunkt.

$A=(-1|1), B(-1|15), C(11|6)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=\begin{pmatrix}0\\14\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC}=C-B=\begin{pmatrix}12\\-9\end{pmatrix}$

$H_c=0{,}5\cdot(A+B)=(-1|8)$ $\qquad$ $H_a=0{,}5\cdot(B+C)=(5|10{,}5)$

$s_c:\begin{pmatrix}0\\14\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0\\14\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix}\Rightarrow y=8$ $\qquad$ $s_a:\begin{pmatrix}12\\-9\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}12\\-9\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5\\10{,}5\end{pmatrix}\Rightarrow 12x-9y=-34{,}5$

$s_c\cap s_a$:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{I}: \quad y=8\\ \mathrm{II}: 12x-9y=-34{,}5\end{array}\right\}\Rightarrow x=3{,}125 \text{ und } y=8$$

$U=(3{,}125|8)$

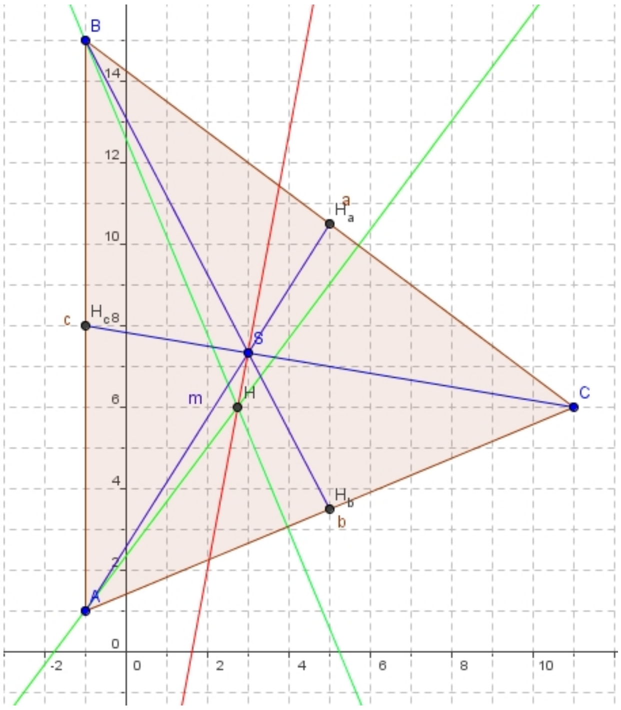
$$r=\left|\overrightarrow{AU}\right|=|U-A|=\left|\begin{pmatrix}4{,}125\\7\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4{,}125^2+7^2}=8{,}125$$

Punkteverteilung: 2 Punkte für die Zeichnung, 2 Punkte für das Aufstellen der Seitensymmetralen, 2 Punkte für den Umkreismittelpunkt (Schnitt der Seitensymmetralen), 2 Punkte für die Berechnung des Radius.

Gegeben ist ein Dreieck ΔABC mit $A=(-1|1), B(-1|15), C(11|6)$.

Beispiel B – Lösung:

Zeichnung – Höhenschnittpunkt – Schwerpunkt – EULER'sche Gerade in Parameterform



$A=(-1|1), B(-1|15), C(11|6)$

Aufstellen der Höhen: Die Höhe h_c steht normal auf $\overrightarrow{AB}$ und geht durch den Eckpunkt C. Die Höhe h_a steht normal auf $\overrightarrow{BC}$ und geht durch den Eckpunkt A.

$$\overrightarrow{AB}=B-A=\begin{pmatrix}0\\14\end{pmatrix}$$

$$h_c:\begin{pmatrix}0\\14\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0\\14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11\\6\end{pmatrix}\Rightarrow y=6$$

$h_c \cap h_a$:

$$\left.\begin{aligned}y&=6\\12x-9y&=-31\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=\frac{33}{12}\text{ und } y=6$$

$$H=\left(\frac{33}{12}\middle|6\right)=(2{,}75|6)$$

$$\overrightarrow{BC}=C-B=\begin{pmatrix}12\\-9\end{pmatrix}$$

$$h_a:\begin{pmatrix}12\\-9\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}12\\-9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow 12x-9y=-21$$

$$S=\frac{1}{3}(A+B+C)=(3|7{,}33)$$

$$\overrightarrow{SH}=H-S=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

EULER'sche Gerade:

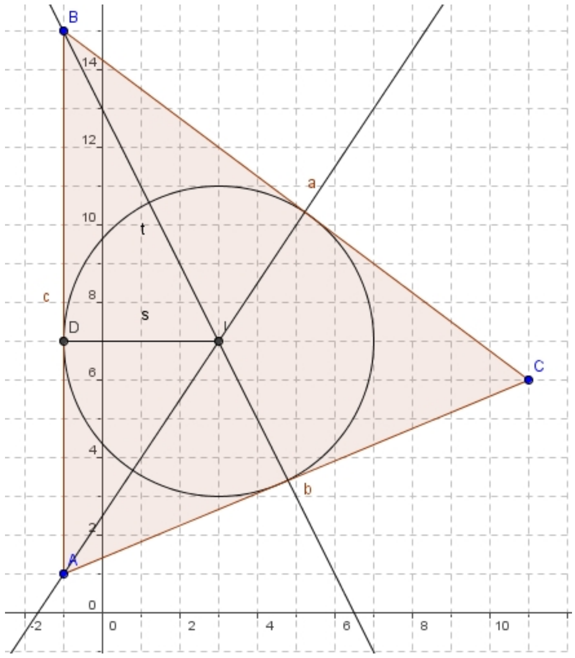
$$X=\begin{pmatrix}\frac{33}{12}\\6\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

Punkteverteilung: 2 Punkte für die Zeichnung, 2 Punkte für das Aufstellen der Höhen, 2 Punkte für den Höhenschnittpunkt (Schnitt der Höhen), 1 Punkt für die Berechnung des Schwerpunkts, 1 Punkt für die EULER'sche Gerade in Parameterform.

Gegeben ist ein Dreieck ΔABC mit $A=(-1|1)$, $B(-1|15)$, $C(11|6)$.

Beispiel C – Lösung:

Zeichnung – Inkreismittelpunkt – Inkreisradius



Der Inkreismittelpunkt ist der Schnitt der Winkelsymmetralen. Der Inkreisradius ist der Abstand vom Mittelpunkt zu einer Seite.

Aufstellen der Winkelsymmetralen w_β:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=\begin{pmatrix}0\\14\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{AB_0}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{AC}=C-A=\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{AC_0}=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_\beta}=\overrightarrow{AC_0}+\overrightarrow{AB_0}=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}12\\18\end{pmatrix}\quad \text{vereinfacht}\quad \overrightarrow{w_\beta}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

$$w_\beta: X=(-1|1)+t\cdot(2|3)$$

Aufstellen der Winkelsymmetralen w_γ:

$$\overrightarrow{BA}=A-B=\begin{pmatrix}0\\-14\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{BA_0}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{BC}=C-B=\begin{pmatrix}12\\-9\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{BC_0}=\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}12\\-9\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{w_\gamma}=\overrightarrow{BC_0}+\overrightarrow{BA_0}=\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}12\\-24\end{pmatrix}\quad \text{vereinfacht}\quad \overrightarrow{w_\gamma}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$w_\gamma: X=(-1|15)+s\cdot(1|-2)$$

$w_\alpha \cap w_\beta$

$$\left.\begin{array}{l}-1+2t=-1+s\\ 1+3t=15-2s\end{array}\right\} s=4 \text{ und } t=2$$

t in w_α eingesetzt, ergibt $I=(3|7)$.

Radius: $D=(-1|7)$ r = 4

Punkteverteilung: 2 Punkte für die Zeichnung, 4 Punkte für das Aufstellen der Winkelsymmetralen, 2 Punkte für den Inkreismittelpunkt (Schnitt der Winkelsymmetralen), 2 Punkte für den Radius.