Summensätze zu Sinus und Cosinus

Arbeitsblatt

1 Zeige zunächst, indem du beliebige Winkel einsetzt, dass im Allgemeinen gilt:

a) $\sin(\alpha + \beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta$ b) $\sin(\alpha - \beta) \neq \sin\alpha - \sin\beta$

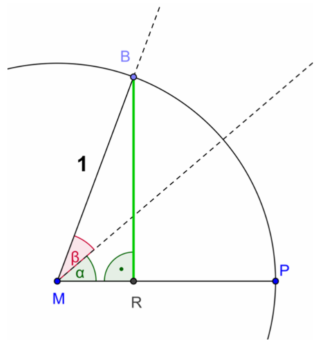
c) $\cos(\alpha + \beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta$ d) $\cos(\alpha - \beta) \neq \cos\alpha - \cos\beta$

Die folgenden Überlegungen sollen zeigen, wie $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ bzw. $\cos(\alpha - \beta)$ mithilfe von $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ ausgedrückt werden können. Dabei kann es hilfreich sein, wenn du die Konstruktionen selbst durchführst, damit du die Gedankengänge schrittweise nachvollziehen kannst.

2 **Herleitung des Summensatzes für $\sin(\alpha + \beta)$**

Schritt 1:

Konstruiere um einen Punkt M einen Kreisbogen. Zeichne ausgehend vom Schenkel MP einen Winkel α und daran anschließend einen Winkel β ein. Punkt B ergibt sich als Schnittpunkt von Kreisbogen und dem zweiten Schenkel von β. Der Radius des Kreisbogens sei 1. Konstruiere die Normale durch B auf die Strecke MP und bezeichne den Fußpunkt mit R.



Im rechtwinkligen Dreieck MRB können nun $\sin(\alpha + \beta)$ bzw. $\cos(\alpha + \beta)$ abgelesen werden.

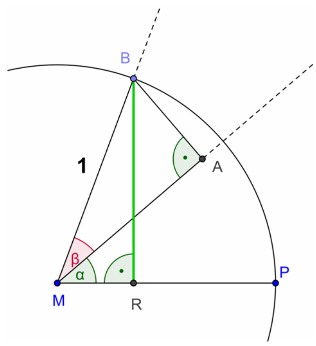
Es gilt:

$$\overline{BR} = \sin(\alpha + \beta) \qquad (1)$$

$$\overline{MR} = \cos(\alpha + \beta) \qquad (2)$$

Schritt 2:

Zeichne einen Punkt A auf dem gemeinsamen Schenkel von α und β so ein, dass AB normal auf MA steht. Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck MAB.



Im rechtwinkligen Dreieck MAB mit der Hypotenuse der Länge 1 gilt gemäß der Definition von Sinus und Cosinus:

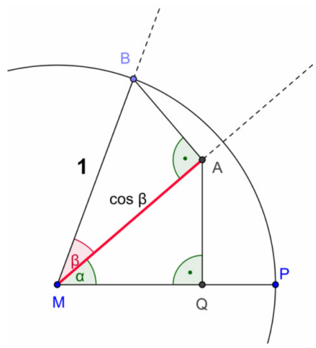
$$\sin\beta = \frac{\overline{AB}}{1} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \sin\beta \qquad (3)$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{MA}}{1} \quad \Rightarrow \quad \overline{MA} = \cos\beta \qquad (4)$$

Schritt 3:

Konstruiere einen Punkt Q auf der Strecke MP so, dass QA normal auf MP steht. Das rechtwinklige Dreieck MQA besitzt wegen (4) eine Hypotenuse der Länge $\cos\beta$.

Wegen (4) gilt weiters:



$$\sin\alpha = \frac{\overline{QA}}{\overline{MA}}$$

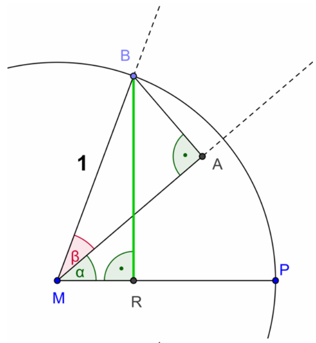
$$\Rightarrow \quad \overline{QA} = \overline{MA} \cdot \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \overline{QA} = \cos\beta \cdot \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \overline{QA} = \sin\alpha \cdot \cos\beta \qquad (5)$$

Schritt 4:

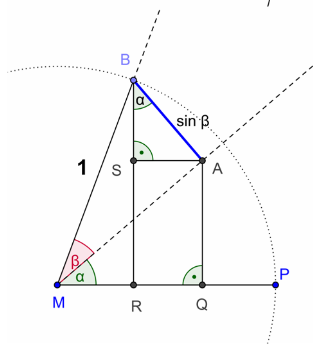
Für weitere Überlegungen ist es notwendig, den Winkel RBA zu bestimmen. Der Winkel α wird von den Schenkeln MP und MA eingeschlossen. BR steht normal auf MP, BA steht normal auf MA. Der Winkel RBA ist daher ein sogenannter Normalwinkel[1] zu α.



Es gilt: $\angle$ (RBA) = $\angle$ (PMA) = α

Schritt 5:

Konstruiere einen Punkt S auf der Strecke RB, sodass AS normal auf RB steht. Das rechtwinklige Dreieck ASB hat wegen (3) die Hypotenuse AB mit der Länge $\sin\beta$.



Es gilt:

$\cos\alpha = \frac{\overline{BS}}{\overline{BA}} \quad \Rightarrow \quad \overline{BS} = \overline{BA} \cdot \cos\alpha$

Daraus folgt wegen (3):

$\overline{BS} = \sin\beta \cdot \cos\alpha = \cos\alpha \cdot \sin\beta$ (6)

Die Länge der Strecke BR beträgt wegen (1) $\sin(\alpha + \beta)$ und lässt sich als Summe darstellen:

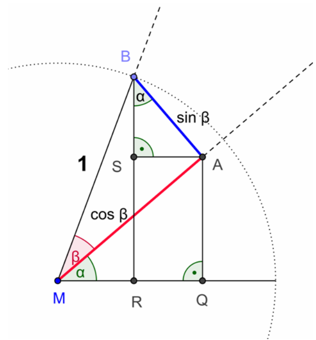
$\overline{BR} = \overline{RS} + \overline{BS} = \overline{QA} + \overline{BS}$

Daraus folgt wegen (5) und (6) der Summensatz **$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$**

Anmerkung: Es kann gezeigt werden, dass diese Formel für beliebige Winkel α und β gilt.

3 Herleitung des Summensatzes für cos ($\alpha + \beta$)

Im rechtwinkligen Dreieck MQA gilt:



$\cos\alpha = \frac{\overline{MQ}}{\overline{MA}} \quad \Rightarrow \quad \overline{MQ} = \overline{MA} \cdot \cos\alpha$

$\Rightarrow \quad \overline{MQ} = \cos\beta \cdot \cos\alpha$

$\Rightarrow \quad \overline{MQ} = \cos\alpha \cdot \cos\beta$ (7)

Im rechtwinkligen Dreieck BSA gilt:

$\sin\alpha = \frac{\overline{SA}}{\overline{BA}} \quad \Rightarrow \quad \overline{SA} = \overline{BA} \cdot \sin\alpha$

$\Rightarrow \quad \overline{SA} = \sin\beta \cdot \sin\alpha$

$\Rightarrow \quad \overline{SA} = \sin\alpha \cdot \sin\beta$ (8)

Wegen (2) beträgt die Länge der Strecke MR $\cos(\alpha + \beta)$ und lässt sich als Differenz darstellen:

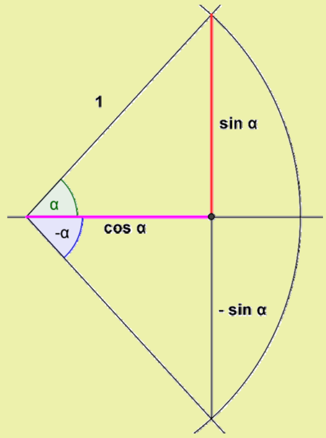
$\overline{MR} = \overline{MQ} - \overline{RQ} = \overline{MQ} - \overline{SA}$

Daraus folgt wegen (7) und (8) der Summensatz:

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

[1] Normalwinkel sind entweder gleich groß oder ergänzen einander auf 180°.

Um die Summensätze für Differenzen $\alpha - \beta$ zweier Winkel herzuleiten, wird in der Summe $\alpha + \beta$ der Winkel β durch $(-\beta)$ ersetzt. $(-\beta)$ kann im Einheitskreis als Winkel im Uhrzeigersinn gedeutet werden.



Dadurch ergeben sich für einen beliebigen Winkel α folgende Zusammenhänge:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ und $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (9)

4 **Herleitung des Summensatzes für $\sin(\alpha - \beta)$**

Setze $(-\beta)$ statt β in den Summensatz für $\sin(\alpha + \beta)$ ein.
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos\alpha \cdot \sin(-\beta)$
Wegen (9) folgt daraus:
$\mathbf{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot (-\sin\beta)}$
$\mathbf{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta}$

5 **Herleitung des Summensatzes für $\cos(\alpha - \beta)$**

Setze $(-\beta)$ statt β in den Summensatz für $\cos(\alpha + \beta)$ ein.
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) - \sin\alpha \cdot \sin(-\beta)$
Wegen (9) folgt daraus:
$\mathbf{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot (-\sin\beta)}$
$\mathbf{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$

Zusammenfassung
Die **Summensätze (Additionstheoreme)** für Sinus und Cosinus und beliebige Winkel α und β lauten:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$ $\quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$ $\quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

Aufgaben

6 Zeige mit dem entsprechenden Summensatz, indem du 2α durch $\alpha + \alpha$ ersetzt, dass für doppelte Winkel Folgendes gilt:
a) $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ b) $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

7 Folgende Werte sind gegeben:

$\sin 0° = 0;$ $\quad \sin 30° = \frac{1}{2};$ $\quad \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$ $\quad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};$ $\quad \sin 90° = 1;$ $\quad \sin 180° = 0;$

$\cos 0° = 1;$ $\quad \cos 90° = 0;$ $\quad \cos 180° = -1;$ $\quad \cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$

Berechne ohne Taschenrechner unter Anwendung der Summensätze.

a) $\cos 15°$	b) $\cos 75°$	c) $\cos 285°$	d) $\sin 15°$	e) $\cos 120°$	f) $\cos 105°$
g) $\cos 270°$	h) $\cos 135°$	i) $\sin 165°$	j) $\sin 150°$	k) $\sin 75°$	l) $\sin 270°$

8 Zeige mit einem geeigneten Summensatz.

a) $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$	b) $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$	c) $\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$
d) $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$	e) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$	f) $\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$