


Summensätze und Reduktionsformeln für den Tangens

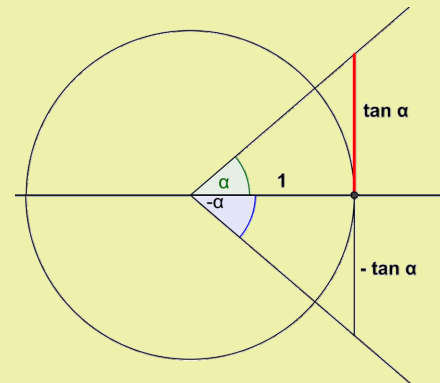
Arbeitsblatt

1

 Der Winkel $(-\alpha)$ kann im Einheitskreis als Winkel im Uhrzeigersinn gedeutet werden.

Dadurch ergibt sich für den Tangens eines beliebigen Winkels α :

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$



2

Herleitung des Summensatzes für $\tan(\alpha + \beta)$

Laut Definition gilt:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta} \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \cdot \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \\ &= \left(\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \right) \cdot \left(\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \right) \end{aligned}$$

Erweitere Zähler und Nenner mit $\frac{1}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$ und ersetze den Bruchstrich durch ein Divisionszeichen.

Vereinfache die Brüche:

$$= \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right) : \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right)$$

Wende die Definition des Tangens an:

$$= (\tan \alpha + \tan \beta) : (1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Es gilt also:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

3

Herleitung des Summensatzes für $\tan(\alpha - \beta)$

Ersetze im Summensatz für $\tan(\alpha - \beta)$ den Winkel β durch $(-\beta)$.

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha \cdot \tan(-\beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot (-\tan \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Der Summensatz für $\tan(\alpha - \beta)$ lautet:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Aufgaben

4

Leite den Summensatz $\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ her.

5

Leite die Reduktionsformeln her.

a) $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ b) $\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan \alpha}$