

Historisches zur Entwicklung des Zahlbegriffs

Arbeitsblatt

Historisches zur Entwicklung des Zahlbegriffs

Viele Mathematiker/innen haben sich Gedanken über das Wesen der Zahlen gemacht. Sind Zahlen vom Menschen erdacht worden, um die Dinge der Natur zu ordnen? Richard Dedekind (1831–1916) meinte, dass die Zahlen freie Schöpfungen des menschlichen Geistes sind, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer zu erfassen. Leopold Kronecker (1823–1891) war der Ansicht, dass die natürlichen Zahlen von Gott gemacht sind. Alle anderen Zahlenmengen seien vom Menschen erdacht.

Die Entstehung der natürlichen Zahlen

Bereits um 3000 v. Chr. wurden in Uruk (Mesopotamien) Texte verfasst, die ganze Zahlen und Bruchzahlen enthielten. Die Zahlen selbst sind vermutlich wesentlich früher entstanden. Von den Ägyptern weiß man, dass sie schon sehr große Zahlen verwendeten.

Bemerkenswert ist, dass es in vielen alten Sprachen neben dem Singular und Plural eigene Wörter für ein Paar gab. In einigen Sprachen hatten die Zahlwörter auch noch weitere Bedeutung. Im Sumerischen zum Beispiel steht das Zahlwort *eins* auch für *Mann* und das Zahlwort *zwei* für *Frau*. Außerdem bündelten viele Völker in ihrer Sprache Zahlen zu Einheiten.

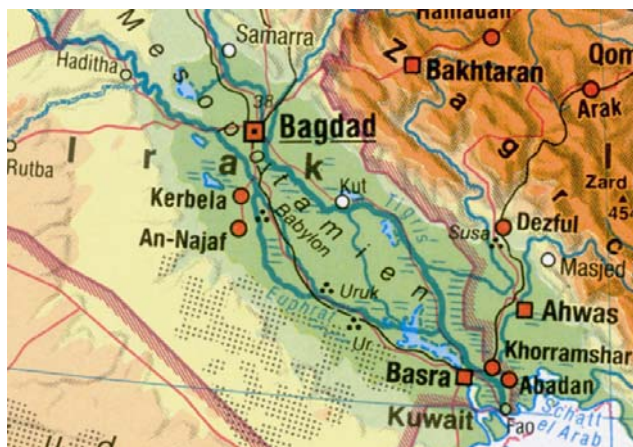
Ein sumerischer Dialekt verwendete beispielsweise ein Dreiersystem:

4 = 3 vorüber 6 = 3 vorüber und 1 und 1
5 = 3 vorüber und 1 7 = 3 und 3 und 1

Die natürlichen Zahlen, so wie wir sie heute kennen, entwickelten sich erst langsam aus der Abstraktion des Zählvorgangs. Die meisten Kulturen kamen ohne den Begriff der Null aus. Für 10 oder ein Vielfaches von 10 wurden oft spezielle Zeichen verwendet.

Die Entstehung des dekadischen Zahlensystems

Zahlen, wie wir sie heute verwenden, haben ihren Ursprung in Indien. Dort wurde ein Zehnersystem (dekadisches¹ Zahlensystem) entwickelt. Voraussetzung dafür war, dass die Null als eigene Zahl mit einem eigenen Symbol verwendet wurde. Das dekadische Zahlensystem ist ein sogenanntes Stellenwertsystem, weil die Position einer Ziffer ihren Wert bestimmt. Das indische Zahlensystem und die Zifferschreibweise wurden um etwa 800 n. Chr. von arabischen Gelehrten übernommen und durch die Übersetzung (12. Jahrhundert) eines arabischen Arithmetikbuches ins Lateinische über Spanien in Europa verbreitet. Deshalb bezeichnen wir unsere heutigen Ziffern als *arabische Ziffern* – im Gegensatz zu den *römischen Zahlzeichen*. Gegen die Einführung des neuen Zahlensystems und das Rechnen mit arabischen Ziffern gab es in Europa zunächst Widerstände. Man rechnete lange Zeit lieber (und auch rascher) mit Rechenbrettern und hatte Angst, dass durch das Verändern von Stellenwerten Fälschungen leichter möglich seien². Im 16. Jahrhundert setzte sich aber der Gebrauch der Dezimalzahlen endgültig durch, da sie für umfangreiche Berechnungen, vor allem in der Astronomie, von Vorteil waren. Die Kommaschreibweise schließlich wurde zu Beginn des 17. Jahrhunderts vom Schotten John Napier (= Neper), einem Amateurmathematiker, eingeführt.



¹ Die Vorsilbe *deka* leitet sich vom griechischen Wort für *zehn* ab.

² Robert Kaplan (2005): Die Geschichte der Null, S. 118 – 126.

Die Entstehung der ganzen Zahlen

Die Erweiterung des Zahlbegriffs auf die negativen Zahlen fand in verschiedenen Kulturen fast gleichzeitig statt. In einem chinesischen Rechenbuch wurden Regeln für das Rechnen mit positiven und negativen Zahlen gefunden. Auch die Inder hatten verschiedene Bezeichnungen für Positives und Negatives.

Diophant von Alexandrien, er lebte im 3. Jahrhundert n. Chr., gab folgende Rechenregel für negative Rechengrößen an: „Minus mal minus ergibt plus, minus mal plus ergibt minus.“

Meist wurden negative Zahlen aber nur als Hilfsmittel für algebraische Zwischenlösungen verwendet, als Lösungen von Gleichungen wurden sie lange nicht anerkannt.

Erst bei Leonardo von Pisa (12. Jahrhundert) – auch Leonardo Fibonacci genannt – trat eine negative Zahl als Lösung einer Gleichung auf.

Viele Mathematiker bis ins 16. und 17. Jahrhundert lehnten negative Zahlen ab. Erst im späten 19. Jahrhundert entwickelte sich ein neues Verständnis negativer Zahlen.

Die Entstehung der Bruchzahlen

Aus der Notwendigkeit heraus, Teile von Objekten zu beschreiben, setzten sich die Bruchzahlen geschichtlich gesehen schneller durch als die negativen Zahlen. Im *Papyrus Rhind* (einer ägyptischen Schriftrolle, die ungefähr 1800 Jahre v. Chr. verfasst wurde) gibt es bereits einige Aufgabenstellungen zur Bruchrechnung. Die Ägypter verwendeten vor allem Stammbrüche für ihre Berechnungen. Bei den Babyloniern traten auch Brüche mit Zählern größer als 1 auf.

Die Griechen dagegen verwendeten den Begriff *Verhältnis*. Für das Rechnen mit Verhältnissen entwickelten sie die *Proportionslehre*. Jede Zahl wurde geometrisch als Strecke interpretiert. Die Bruchzahl $z = \frac{3}{4}$

wurde als Verhältnis 3:4 zwischen der Strecke z und der Einheitsstrecke e aufgefasst. Zwei Strecken (Zahlen) a und b werden *kommensurabel* genannt, wenn sie ein gemeinsames Maß besitzen. Es muss also eine kleinere Strecke (Zahl) geben, die in den beiden Strecken a und b enthalten ist. Für die Pythagoräer war es ein Glaubenssatz, dass alle Strecken kommensurabel seien. Angeblich entdeckte Hippasos von Metapont, ein Schüler von Pythagoras, dass die Diagonale im regelmäßigen Fünfeck kein gemeinsames Maß mit der Seitenlänge hat, und wurde daraufhin auf Anweisung seines Lehrers ertränkt.

Die Entstehung der irrationalen Zahlen

Irrationale Zahlen – wie zum Beispiel π – waren schon früh bekannt. Noch unbekannt war aber, dass π nicht als Bruch darstellbar ist. Euklid bewies, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist.

Michael Stifel (1487–1567) erkannte, dass eine irrationale Zahl keine ganze und keine gebrochene Zahl sein könne. Er entdeckte auch, dass zwischen zwei ganzen Zahlen unendlich viele Brüche, aber auch unendlich viele irrationale Zahlen liegen. Die exakte Definition der irrationalen Zahlen gelang erst einigen deutschen Mathematikern im 19. Jahrhundert.