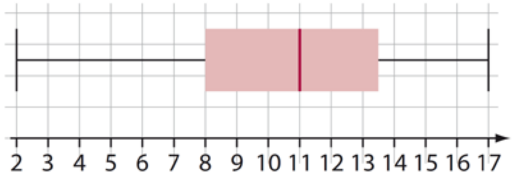
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Kompetenzcheck Beschreibende Statistik – Lösungen

1 $q_1 = 8$; $q_2 = 11$; $q_3 = 13{,}5$



2 Richtig – richtig – falsch – richtig – falsch

3 Richtig – richtig – richtig – falsch – falsch

4

Geschwisteranzahl	0	1	2	3	4
Anzahl	3	1	4	2	1

5 Median: 2500 €; arithmetisches Mittel: 3280 €; Median ist aussagekräftiger, er gibt an, dass 50 % der Urlaubskosten größer oder kleiner als 2500 € sind. Das arithmetische Mittel wird vom Ausreißer 7200 € stark beeinflusst.

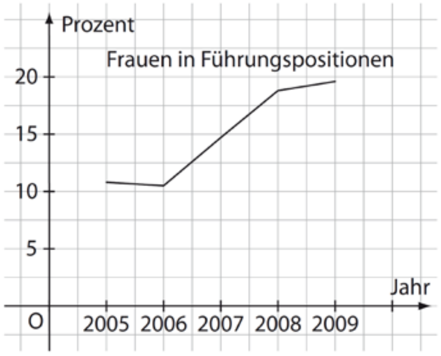
6 Richtig – falsch – richtig – falsch – richtig

7 Richtig – falsch – falsch – richtig – falsch

Typ-2-Aufgaben Beschreibende Statistik – Lösungen

1 a) Von 10,5 % bis 19,6 %

b) Nein, zu steil



c) ca. 943 Frauen in Führungspositionen (2008: 18,8 %)

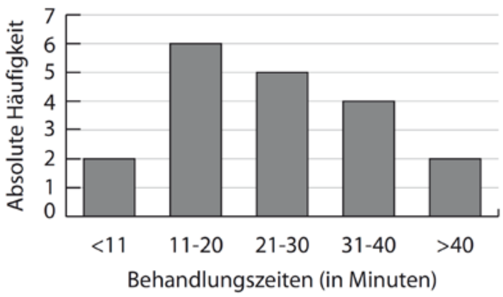
2 a) min = 0; q_1 = 2,75; med = 3,5; q_3 = 4; max = 4,5; Spannweite = 4,5; Quartilsabstand = 1,25

b) ≈ 3,45 Euro

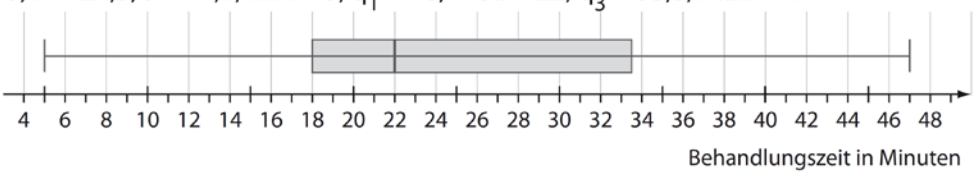
c) Das arithmetische Mittel ist kleiner als der Median, weil die Datenwerte links vom Median mehr vom Median abweichen als die Daten rechts davon.

d) Die Standardabweichung s wird kleiner.

3



b) $\overline{x} \approx 24{,}3$; $s \approx 11{,}1$; min = 5; q_1 = 18; med = 22; q_3 = 33,5; max = 47



c) Bis auf wenige Ausnahmen ist die Behandlungszeit beim zweiten Besuch kürzer als beim ersten.

d) Die Gerade geht durch die Punkte (24 | 18) und (46 | 30). Funktion f mit $f(x) = \frac{6}{11} \cdot x + \frac{54}{11}$

4 a) ca. 8 344 000 Personen; ca. 834 400 Personen; ca. 4 172 000 Personen

b) $q_1 = 16\,056$ €, med = 21 807 €, $q_3 = 29\,388$ €, $\overline{x} = 24\,423$ €

c) Median = 21 807 €, arithmetisches Mittel = 24 423 €. Die höheren Einkommen weichen stärker vom Median ab als die niedrigen Einkommen. Dadurch ist die Verteilung rechtslastig und das arithmetische Mittel höher als der Median.

d) $|q_{0,50} - q_{0,10}| = 10\,177$ €; $|q_{0,50} - q_{0,90}| = 17\,572$ €. Der Abstand der 10 %-Perzentile zum Median ist deutlich größer als jener der 90 %-Perzentile zum Median. Sehr hohe Einkommen weichen stärker vom Median ab als sehr niedrige Einkommen.

e) Personengewichte: 2,6; Jahresäquivalenzeinkommen: ca. 12 308 €; 1. Erwachsener: 12 308 €, 2. Erwachsener: 6154 €, Kind (16 Jahre): 6154 €, Kinder (10 und 12 Jahre): je 3692 €

Kompetenzcheck Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung – Lösungen

1	Falsch – richtig – falsch – falsch – falsch – falsch
2	❶ 1, ❷ 2
3	Falsch – falsch – falsch – richtig – falsch
4	Falsch – richtig – falsch – richtig – falsch
5	C – D – B – E
6	$P = 0{,}97 + 0{,}03 \cdot 0{,}97 = 0{,}9991$
7	$\frac{35}{40} = 0{,}875 = 87{,}5\,\%$
8	a) $P = \frac{228}{482} \approx 0{,}473$ b) $P = \frac{136}{284} \approx 0{,}479$ c) $P = \frac{106}{198} \approx 0{,}535$

Typ-2-Aufgaben Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung – Lösungen

1 a)

	Frau	Mann	
Zugelassen	Absolute H: 724 Relative H: 0,087	Absolute H: 776 Relative H: 0,093	Absolute H: 1500 Relative H: 0,179
Nicht zugelassen	Absolute H: 4159 Relative H: 0,497	Absolute H: 2705 Relative H: 0,323	Absolute H: 6864 Relative H: 0,821
	Absolute H: 4883 Relative H: 0,584	Absolute H: 3481 Relative H: 0,416	Absolute H: 8364 Relative H: 1

b) (1) $P(\text{Frau}) \approx 0{,}584$ (2) $P(\text{Zugelassen}) \approx 0{,}179$

c) D – A – F – C

2 a) 2006 und 2007: durchschnittlich 6066 Erkrankungen pro Jahr, 2008/2009: 8145 Erkrankungen pro Jahr

b) Etwa 53 %

c) (1) Österreich: 4,2 auf 1 Million, Bayern: 5,6 auf 1 Million

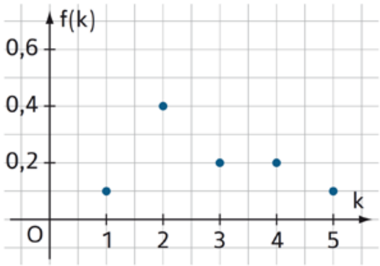
(2) Lineares Modell: $N_1(t) = 641\,t + 70$, exponentielles Modell: $N_2(t) = 70 \cdot \left(\frac{711}{70}\right)^t$

2023 $(t = 10)$: $N_1(t) = 6480$, $N_2(t) \approx$ 818 Milliarden

Exponentielles Wachstum liefert nach 10 Jahren einen unrealistischen Wert, der die Einwohnerzahl Bayerns weit übersteigt. Lineares Wachstum geht davon aus, dass die absolute Zunahme pro Jahr konstant bleibt, und liefert einen glaubwürdigen Wert.

Kompetenzcheck Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen – Lösungen

1



2 A und D

3 $E(X) = \mu = 1{,}45$; $\sigma \approx 1{,}02$; $[0{,}43;\ 2{,}47]$
Ein zufällig ausgewählter Fußgänger muss im Durchschnitt mit einer Wartezeit von etwa 1,5 Minuten rechnen, wobei die Abweichung im Durchschnitt 1 Minute beträgt. Zwei Drittel der Fußgänger, die diese Straße überqueren wollen, haben eine Wartezeit von 0,4 Minuten (das sind 24 Sekunden) bis 2,5 Minuten (also 2 Minuten und 30 Sekunden) in Kauf zu nehmen.

4 $p \approx 0{,}0101$; $\approx 42{,}75$ €; $E(X) \approx -1{,}35$ €

5

	Wahrscheinlichkeit	Kosten mit Versicherung	Kosten ohne Versicherung
Kein Rücktransport notwendig	99,9 %	15 €	0 €
Rücktransport notwendig	0,1 %	15 €	10 000 €

Kosten ohne Versicherung:
$E(X) = \mu = 10$ €
richtig – falsch – falsch – falsch – richtig

6 richtig – falsch – falsch – richtig – richtig

7 Ereignis E: 100 Flüge werden zufällig ausgewählt, 30 davon starten verspätet.
$P(E) \approx 0{,}039 = 3{,}9\,\%$

$\binom{100}{30}$: Der Binomialkoeffizient gibt an, wie viele Möglichkeiten (Reihenfolgen) es gibt, 30 verspätete und 70 nicht verspätete Flüge anzuordnen.
$0{,}36^{30}$ gibt die Wahrscheinlichkeit für 30 verspätete Flüge an. 0,36 ist die Einzelwahrscheinlichkeit für einen verspäteten Flug. $0{,}64^{70}$ gibt die Wahrscheinlichkeit für 70 pünktlich startende Flüge an. 0,64 ist die Gegenwahrscheinlichkeit zu 0,36.

8 A – D – E – C

9 Wird mit Binomialverteilung gearbeitet, weicht die Anzahl der Gewinnlose unter 20 gekauften Losen um ca. 1,9 vom Erwartungswert ab, weil $\sigma \approx \sqrt{20 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}$ ist.

10 $n = 10$, $p = 0{,}2$, Anteil der markierten Tiere in der Herde: 20 %
Ermittlung von p:
aus der Grafik $E(X) \approx 2 \Rightarrow\ 10 \cdot p = 2 \Rightarrow$
$p = 0{,}20$ oder
aus der Grafik $P(X = 0) \approx 0{,}11 \Rightarrow$
$\binom{10}{0} \cdot p^0 \cdot (1 - p)^{10} \approx 0{,}11 \Rightarrow p = 0{,}2$

11 Die Wahrscheinlichkeit, in einen Stau zu geraten, wird für jeden dieser Tage mit $p = 0{,}75$ angenommen. Es kann an jedem Tag zwischen *Stau* und *Kein Stau* unterschieden werden.

12 $E(X) = \mu = 150$, $\sigma \approx 6{,}1$, $[144;\ 156]$. Es muss mit 150 Stau-Fahrten gerechnet werden. Bei sehr vielen gleichen Versuchsserien ergibt sich eine mittlere Abweichung vom Erwartungswert von etwa 6 Fahrten. Der Großteil der Versuchsausgänge (etwa zwei Drittel) ergibt Werte von 144 bis 156 Fahrten.

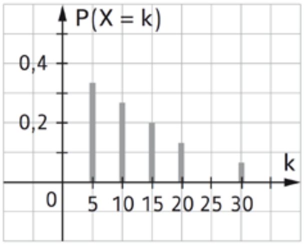
13 $k_{max} \approx E(X) = 150$, $P(X = 150) = 0{,}065$

Typ-2-Aufgaben Stochastik – Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen – Lösungen

1 a) Es gibt genau zwei Versuchsausgänge (Mädchen oder Bub) und die Wahrscheinlichkeiten p und q = 1 – p bleiben stets gleich.
falsch – falsch – richtig – falsch – falsch
b) falsch – falsch – falsch – richtig – richtig

2 a) Zufallsvariable X gibt den Gewinn an.

k	$P(X = k)$
5	$\frac{5}{15}$
10	$\frac{4}{15}$
15	$\frac{3}{15}$
20	$\frac{2}{15}$
30	$\frac{1}{15}$



b) $E(X) = 5 \cdot \frac{5}{15} + 10 \cdot \frac{4}{15} + 15 \cdot \frac{3}{15} + 20 \cdot \frac{2}{15} + 30 \cdot \frac{1}{15} = \frac{180}{15} = 12$
Der Spieleinsatz muss bei mehr als 12 € liegen, damit die Veranstalter einen Gewinn machen.
Nein, es kann auch einen Verlust bedeuten. Der Erwartungswert gilt nur für „lange“ Zeit.

c) Zufallsvariable Y gibt die Anzahl der Gewinne von 20 € an.

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y \leq 1) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1)] \\ &= 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot \left(\frac{2}{15}\right)^0 \cdot \left(\frac{13}{15}\right)^{10} + \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{2}{15}\right)^1 \cdot \left(\frac{13}{15}\right)^9\right] \\ &\approx 1 - [0{,}2391 + 0{,}3678] = 0{,}3931 \; (<0{,}5) \end{aligned}$$

oder

$E(Y) = n \cdot p = 10 \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33 < 2$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 Spielen mindestens zweimal der Gewinn von 20 € erzielt wird, beträgt nur ca. 39,31 %. Die Freundin sollte die Wette annehmen und dagegen wetten, weil ihre Chancen besser stehen.

d) $P(20, 15, 15, 30, 20) = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{2}{15} = \frac{36}{15^5} = \frac{36}{759\,375} \approx 0{,}000\,047$

$P(20, 20, 20, 20, 20) = \left(\frac{2}{15}\right)^5 = \frac{2^5}{15^5} = \frac{32}{759\,375} \approx 0{,}000\,042$

Nein, die Wahrscheinlichkeit für fünf Gewinne von je 20 € in Folge ist kleiner.

3 a) Mit $\overline{x}$ = 15,56 und med = 16 kann das Durchschnittsalter mit 16 Jahren angegeben werden.

b) Die Streckendiagramme A und D können weder die Wahrscheinlichkeit des Merkmals „mache selbst Musik“ und „bin Vegetarier/in“ beschreiben, da bei A p sehr groß sein muss und bei D sehr klein (kleiner als 0,17) sein muss. Das Streckendiagramm B beschreibt die Wahrscheinlichkeit des Merkmals „mache selbst Musik“, das Streckendiagramm C beschreibt die Wahrscheinlichkeit des Merkmals „bin Vegetarier/in“, da aufgrund p = 0,17 die Strecken mit der höchsten Wahrscheinlichkeit weiter nach links verlagert sind als die mit p = 0,32.

c) $P(60 \Leftarrow X \Leftarrow 70) = 4\%$; $E(x) = 85$

d) $E(x) = 192$, $\sigma = 11{,}43$

Für den 1σ-Bereich ist die Wahrscheinlichkeit etwa 69 %, er liegt bei 181 bis 203 Personen. Das heißt, mit einer Wahrscheinlichkeit etwa 69 % sind 181 bis 203 Jugendliche der Stichprobe Vegetarier.

Für den 2 σ-Bereich ist die Wahrscheinlichkeit etwa 96 %, er liegt bei 169 bis 215 Personen. Das heißt, mit einer Wahrscheinlichkeit etwa 96 % sind 169 bis 215 Jugendliche der Stichprobe Vegetarier.

Für den 3 σ-Bereich ist die Wahrscheinlichkeit etwa 99,7 %, er liegt bei 158 bis 226 Personen.

Das heißt, mit einer Wahrscheinlichkeit etwa 99,7 % sind 158 bis 226 Jugendliche der Stichprobe Vegetarier.

4 a)

Gruppe	Minimum	Unteres Quartil	Median	Oberes Quartil	Maximum
A	12	15	16	17	20
B	12	13	15	16	16
C	12	17	18	19	23

Für die Fahrschulen „besser“ kann bedeuten, dass mehr Fahrstunden absolviert werden müssen, da dies mehr Einnahmen für die Fahrschule bringt. In diesem Fall ist die Gruppe C für die Fahrschulen besser, da das Maximum an benötigten Fahrstunden, aber auch der Median weit über den Werten der Gruppe A und B liegen.

b) $P(X \Leftarrow 30) = 2{,}5\%$; da ein n-stufiger Versuch mit genau zwei Versuchsausgängen vorliegt, kann mit der Binomialverteilung gearbeitet werden. In diesem Fall ist p = 0,4 und n = 100.

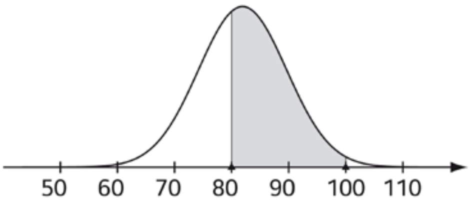
Kompetenzcheck Wahrscheinlichkeitsrechnung – Die Normalverteilung Lösungen

1	richtig – richtig – falsch – richtig – richtig
2	$P(X \geq 400) = 0{,}9$
3	Zeitschrift A darf nicht mit einer Normalverteilung approximieren, weil $\sigma \approx 2{,}55$. Zeitschrift B darf mit einer Normalverteilung approximieren, weil $\sigma \approx 8{,}07$.
4	0,0296 bzw. 2,96 %
5	richtig – falsch – richtig – richtig – richtig

Typ-2-Aufgaben Wahrscheinlichkeitsrechnung – Die Normalverteilung Lösungen

1 a) X ist eine binomialverteilte Zufallsvariable, weil der Versuch „Raucher-oder-Nichtraucher" 200-mal durchgeführt wird, es jeweils genau 2 mögliche Versuchsausgänge gibt und die Wahrscheinlichkeiten $p = 0{,}637$ und $q = 1 - p = 0{,}363$ stets gleich bleiben.
Approximation der Binomialverteilung mit einer Normalverteilung mit $\mu = 127{,}4$ und $\sigma = 6{,}8$. Auf Stetigkeitskorrektur kann verzichtet werden.
$P(X \geq 130) \approx 0{,}3511$
Die Wahrscheinlichkeit, mindestens 130 Nichtraucher zu finden, beträgt 35 %.
b) falsch – richtig – richtig – richtig – falsch

2 a) X ... Anzahl der Transporter ohne Mängel; $p = 0{,}517$
$P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}517^2 \cdot 0{,}483 \approx 0{,}3873$
Das Zufallsexperiment „Technische Überprüfung" hat nur zwei Ausgänge (ohne Mängel, mit Mängel) und kann unter denselben Bedingungen (d. h. mit derselben Wahrscheinlichkeit) wiederholt werden. Deshalb kann mit einer Binomialverteilung gerechnet werden.
b) X ... Anzahl der Transporter mit erheblichen Mängeln
$\mu = n \cdot p = 300 \cdot 0{,}273 = 81{,}9$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{300 \cdot 0{,}273 \cdot 0{,}727} \approx 7{,}7163$
$P(80 \leq X \leq 100) \approx 0{,}5878$



$P(\mu - \varepsilon \leq X \leq \mu + \varepsilon) = 0{,}90$ ergibt $\varepsilon \approx 12{,}69$
Intervall [69,21; 94,59] nach außen runden.
Mit mindestens 90%iger Wahrscheinlichkeit weisen zwischen 69 und 95 Transporter erhebliche Mängel auf.
c) 1 nicht 2 $n \cdot p \cdot (1 - p) < 9$

3 a) Abteilung A: min = 10, $q_1 = 12$, $\tilde{x} = 15$, $q_3 = 17$, max = 18
Abteilung B: min = 2, $q_1 = 10$, $\tilde{x} = 11$, $q_3 = 14$, max = 17
Im Durchschnitt müssen in Abteilung A mehr Überstunden als in Abteilung B ausbezahlt werden. Allerdings ist die Spannweite in Abteilung B mit 15 Überstunden größer als in Abteilung A mit 8 Überstunden.
In Abteilung A leisten rund 50 % der Mitarbeiter/innen zwischen 12 und 17 Überstunden, in Abteilung B sind es zwischen 10 und 14 Stunden.
b) kein Krankenstandstag: $p = 0{,}05$, $q = 0{,}95$
Für Abteilung mit 723 Mitarbeiter/innen: $\mu = 36{,}15$; $\sigma = 5{,}86$ → daher Normalverteilung: $P(X \geq 40) = 0{,}2556$
Für Abteilung mit 5 Mitarbeiter/innen: $\mu = 0{,}25$; $\sigma = 0{,}487$ → Binomialverteilung: $P(X = 1) = 0{,}2036$

Kompetenzcheck Schließende Statistik – Lösungen

1	[0,5418; 0,6382]
2	falsch – falsch – richtig – falsch – richtig
3	(1) 3. Zeile, (2) 1. Zeile
4	falsch – richtig – falsch – falsch – falsch