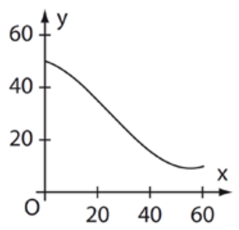
Analysis

Kompetenzcheck Reelle Funktionen – Lösungen

1

a)



b) 25,8 m

c) $x = 15$

d) T(51,7 | 13,7)

e) monoton fallend: $0 \leq x < 51{,}7$; monoton steigend: $x > 51{,}7$

2

a) 0,09 € b) −0,02 €/Monat
c) −0,015 d) 9,1 % e) 1,056

3

Falsch – richtig – richtig – falsch – falsch

4

(1) Durch eine Funktion vom Typ $y = \frac{a}{x}$ bzw. $F(r) = \frac{a}{r}$. Sie beschreibt ein indirekt proportionales Verhältnis. (Potenzfunktion bzw. gebrochen rationale Funktion)

(2) Die neunfache Kraft.

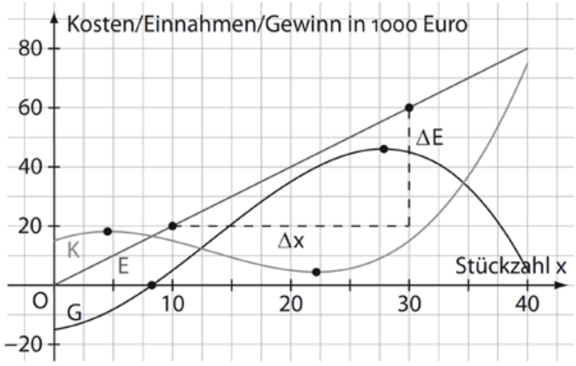
(3) $F(3v, 3r) = m \cdot \frac{(3v)^2}{3r} = m \cdot \frac{9v^2}{3r}$
$= 3 \cdot \left(m \cdot \frac{v^2}{r}\right) = 3 \cdot F(v, r)$
Die Kraft ist bei dreifacher Geschwindigkeit und dreifachem Radius dreimal so groß.

(4) Auf das $\sqrt{10}$-fache der Geschwindigkeit, d. h. auf die ca. 3,16-fache Geschwindigkeit.

Typ-2-Aufgaben Reelle Funktionen – Lösungen

1 a) $x_1 \approx 8$, $G(8) = 0$: Bei 8 Stück (x_1) macht der Betrieb keinen Gewinn.
$x_2 \approx 28$, $G(28) \approx 45$: Bei 28 Stück (x_2) ist der Gewinn maximal. Er beträgt rund 45 000 Euro.

b) $\Delta E = E(30) - E(10) = 60 - 20 = 40$
ΔE beschreibt die Veränderung der Einnahmen, wenn die Stückzahl von 10 auf 30 zunimmt. Die Einnahmen steigen um 40 000 Euro.
Differenzenquotient $\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{E(30) - E(10)}{30 - 10} = \frac{40}{20} = 2$
Der Differenzenquotient gibt an, um wie viel Euro sich die Einnahmen verändern, wenn zwischen 10 und 30 Stück die Produktion um 1 Stück steigt. Pro zusätzlich produziertem Stück steigen die Einnahmen um 2000 Euro.



c) $K(x)$ ist im Intervall [0; 5] steigend, im Intervall [5; 22] fallend und im Intervall [22; 40] steigend. Bis 5 Stück steigen die Kosten. Von 5 bis 22 Stück fallen die Kosten. Sie erreichen bei 22 Stück ihr Minimum. Ab 22 Stück steigen die Kosten wieder.

d) $G(15) \approx 21$, $E(15) = 30$, $K(15) \approx 9$: $E(15) - K(15) = 30 - 9 = 21 = G(15)$
Der Betrieb macht von 9 bis 40 Stück Gewinn.

2 a) falsch – richtig – falsch

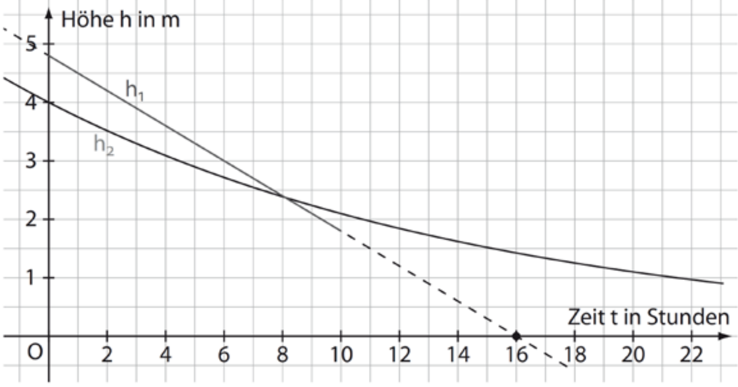
Zeitintervall	[1; 3]	[3; 6]
absolute Änderung des Pegelstandes	– 0,6	– 0,9
mittlere Änderung des Pegelstandes	– 0,3	– 0,3
prozentuelle Änderung des Pegelstandes	– 13,33 %	– 23,08 %

b) falsch – falsch – richtig

Zeitintervall	[1; 3]	[3; 6]	[4; 6]
absolute Änderung des Pegelstandes	– 0,45	– 0,58	– 0,4
mittlere Änderung des Pegelstandes	– 0,23	– 0,19	– 0,19
prozentuelle Änderung des Pegelstandes	– 12 %	– 18 %	– 12 %

c) Beide Funktionen sind im Intervall [0; 10] fallend. h_1 ist eine lineare Funktion mit $k < 0$ und fällt daher. h_2 ist eine Exponentialfunktion mit $0 < a < 1$ und fällt daher.

d) Keine Nullstelle im Intervall [0; 10] für beide Funktionen.
Da h_1 eine lineare Funktion ist und die Gleichung $4{,}80 - 0{,}30\,t = 0$ genau eine Lösung hat, existiert eine Nullstelle für $G = \mathbb{R}$.
Da h_2 eine Exponentialfunktion ist und die Gleichung $4{,}0 \cdot 0{,}9375^t = 0$ keine Lösung hat, existiert auch für $G = \mathbb{R}$ keine Nullstelle. Die waagrechte Achse t ist Asymptote.



Kompetenzcheck Differentialrechnung – Lösungen

1 falsch – richtig – falsch – falsch – richtig

2 $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx -35$. Der Wert des Differenzenquotienten beträgt etwa -35. Die mittlere Änderungsrate im Zeitintervall [30; 35] beträgt -35. Das Segelflugzeug sinkt im Mittel um 35 m pro Minute.

3 richtig – falsch – richtig – richtig – richtig

4 20 m/s

5 $v = 40\,m/s$

6 $a(t) = 10\,m/s^2$. Die Beschleunigung ist konstant.

7 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

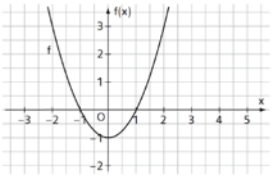
8 $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$

9 $f'(x) = -3\sin(3x)$; $f''(x) = -9\cos(3x)$

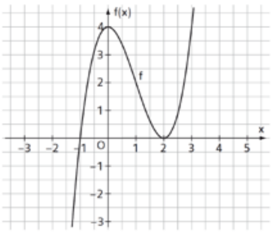
10 D – A – F – C

11 C – E – F – A

12



13



14 Im Intervall [0; 0,85] nimmt die Konzentration des Medikamentes im Blut zu, zum Zeitpunkt $t = 0{,}85$ ist die Konzentration des Medikaments im Blut am höchsten; im Intervall [0,85; ∞[nimmt die Konzentration des Medikamentes im Blut ab.

15 Die Funktion f ist monoton steigend in den Intervallen $(-\infty; -1)$ und $(3; \infty)$.
Die Funktion f ist monoton fallend im Intervall $(-1; 3)$.
Die Funktion f ist negativ gekrümmt im Intervall $(-\infty; 1)$ und positiv gekrümmt im Intervall $(1; \infty)$

16 Die erste Ableitung f′ hat mindestens Grad 3, weil die Funktion f drei Extremstellen hat.

17 falsch – richtig – richtig – richtig – richtig

18 richtig – falsch – richtig – richtig – richtig

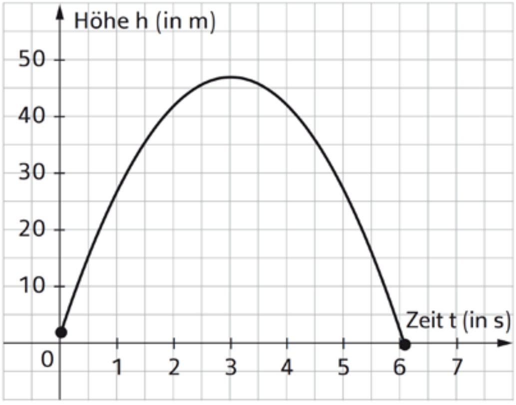
19 C – D – E – F

20 Die Funktion f hat an der Stelle $x = -0{,}5$ eine lokale Maximumstelle, weil $f'(-0{,}5) = 0$ und daher die Tangente im Punkt $(-0{,}5\,|\,f(-0{,}5))$ die Steigung 0 hat. Außerdem ist f′ für alle $x < -0{,}5$ positiv und f′ für alle $x > -0{,}5$ negativ. Das bedeutet, dass für alle $x < -0{,}5$ die Funktion steigt und für $x > -0{,}5$ die Funktion fällt.

21 D – E – B – C

Typ-2-Aufgaben Differentialrechnung – Lösungen

1 a)



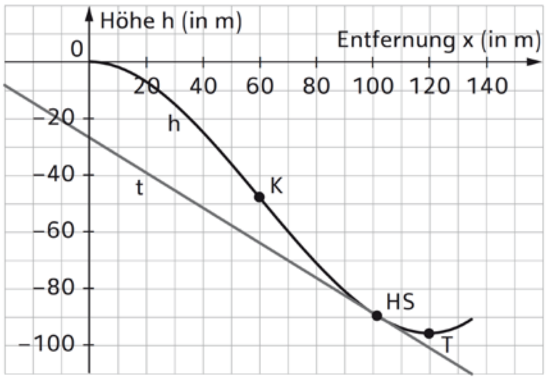
b) $D = [0; 6{,}07]$
Der Definitionsbereich beginnt mit dem Abschuss des Leuchtsigals zum Zeitpunkt $t = 0$ und endet mit dem Aufschlagen auf der Wasseroberfläche an der rechten Nullstelle.
Berechnung der Nullstellen: $h(t) = 0 \Rightarrow -5t^2 + 30t + 2 = 0$
$\Rightarrow t_1 = -0{,}07$ und $t_2 = 6{,}07$.
t_1 liegt außerhalb des Definitionsbereiches. Der Signalkörper schlägt nach etwa 6,1 s auf dem Wasser auf.

c) $h(0) = 2$. Das Leuchtsignal wird aus einer Höhe von 2 m abgeschossen.

d) Um die maximale Höhe zu ermitteln, muss die Stelle des Hochpunktes berechnet werden. Die Tangente hat an dieser Stelle die Steigung 0. Daher muss $h'(t) = 0$ gelten: $h'(t) = -10t + 30 \Rightarrow -10t + 30 = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow h(3) = 47$.
Das Leuchtsignal erreicht nach 3 s seine maximale Höhe von 47 m.

e) $\frac{dh}{dt}(0) = h'(0) = 30$. Die Leuchtrakete hat bei ihrem Abschuss zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Geschwindigkeit von 30 m/s. Ihre größte Geschwindigkeit hat der Körper beim Aufschlag auf dem Wasser, da die erste Ableitung zu diesem Zeitpunkt dem Betrag nach am größten ist: $h'(6{,}07) = -30{,}7$.
$|h'(6{,}07)| > |h'(0)|$. Die Beschleunigung wird durch die zweite Ableitung ausgedrückt: $h''(t) = -10$. Die Beschleunigung ist konstant und beträgt $-10\ \text{m/s}^2$.
Da die Beschleunigung negativ ist, ist der Graph negativ gekrümmt. Der Graph beschreibt eine Rechtskurve.

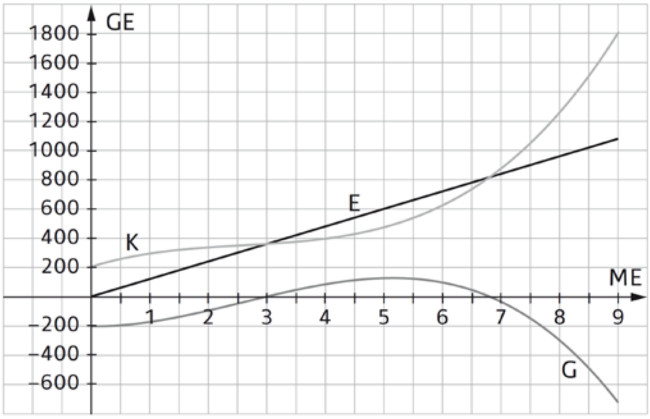
2 a) Da sich am K-Punkt die Krümmung ändert, liegt ein Wendepunkt vor.
Es muss gelten: $h''(x) = 0$ und $h'''(x) \neq 0$
$\Rightarrow \frac{x}{1500} - \frac{1}{25} = 0 \Rightarrow x = 60$ und
$h'''(60) = \frac{1}{1500} \neq 0 \Rightarrow K(60|-48)$
Krümmungsverhalten im Intervall $[0; 60]$: z. B. $h''(30) = -0{,}02 \Rightarrow$ negative Krümmung
Krümmungsverhalten im Intervall $[60; 120]$: z. B. $h''(75) = 0{,}01 \Rightarrow$ positive Krümmung



b) Extremstellen: $h'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{3000} - \frac{x}{25} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 120$.
Wegen $h''(120) = 0,04 > 0$ ist an der Stelle $x = 120$ ein Tiefpunkt: $T(120|-96)$
Der Gegenhang beginnt 120 m vom Schanzentisch entfernt und liegt 96 m unterhalb des Schanzentisches.

c) Wegen $\tan(32°) \approx 0,62$ und abfallendem Gelände beträgt die Steigung $-0,62$.
Für die Stelle des Hill-Size-Punktes muss gelten:
$h'(x) = -0,62 \Rightarrow \frac{x^2}{3000} - \frac{x}{25} = 0,62 \Rightarrow x_1 \approx 18,3$ und $x_2 \approx 101,7$.
Der Hill-Size-Punkt befindet sich in einer Entfernung von etwa 102 m vom Schanzentisch entfernt.
$HS(101,7|-89,99) \Rightarrow$ Gleichung der Tangente an h: $y = -0,62x - 26,93$

3 a)



b) Gewinnschwelle: 3ME Gewinngrenze: 6,8 ME

c) Gewinnmaximale Produktionsmenge: 5,15 ME; maximaler Gewinn 126,8 GE.

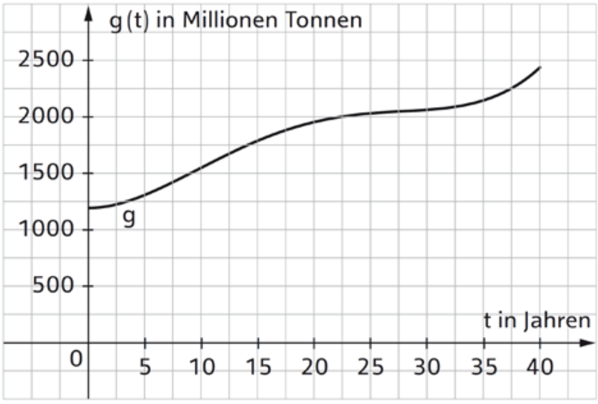
d) $K'(x) = 15x^2 - 78x + 124$
$K''(x) = 30x - 78$
$K''(x) = 0 \Rightarrow x = 2,6$
$K'(2,6) = 22,6$
Für 2,6 ME sind die Grenzkosten am geringsten. Sie betragen 22,6 GE.

4 a) Da die Kostenfunktion eine Polynomfunktion 3.Grades ist, ist die Grenzkostenfunktion eine Polynomfunktion 2. Grades. Diese quadratische Funktion besitzt ein Minimum bei 8,3; das bedeutet: Bei der Produktion von 0 bis 8 Mengeneinheiten fällt die momentane Änderungsrate der Gesamtkosten bei einer Produktionssteigerung von einer Mengeneinheit, ab 9 Mengeneinheit steigt diese momentane Änderungsrate wieder.

b) Die Kostenkehre liegt bei der Produktion von 8,33 Mengeneinheiten. Vor der Kostenkehre (Produktion von 0 bis 8,33 ME) ist die Kostenfunktion negativ gekrümmt, d.h. die Kosten sind degressiv. Nach der Kostenkehre ($x > 8,33$) ist die Kostenfunktion positiv gekrümmt, d.h. die Kosten sind progressiv.

c) Der Funktionsgraph wird um den Wert der Erhöhung entlang der y-Achse nach oben verschoben.

5 a)



Von 1970 bis 1980 steigt die Getreideproduktion schneller als von 1980 bis etwa 1995. Danach steigt die Getreideproduktion wieder rascher an.

b) $w'(t) = 57{,}93 \cdot e^{0{,}0156985t}$ und w′ ist auf ganz ℝ > 0. Daher wächst die Weltbevölkerung von 1970 bis 2010.

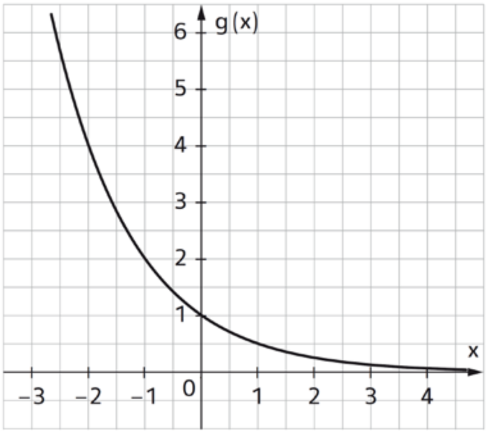
c) $\frac{g(10) - g(0)}{10} = 35{,}7$; wenn die Jahre von 1970 bis 1980 betrachtet werden, dann beträgt die mittlere Zunahme der Getreideproduktion 35,7 Millionen Tonnen pro Jahr.

$\frac{w(10) - w(0)}{10} = 62{,}74$; wenn die Jahre von 1970 bis 1980 betrachtet werden, dann beträgt die mittlere Zunahme der Weltbevölkerung 62,74 Millionen Menschen pro Jahr.

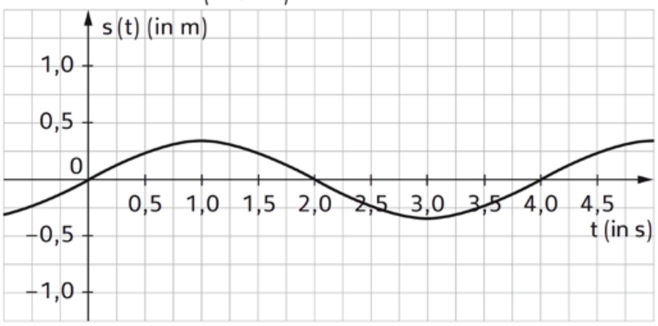
6 a) f bzw. g sind streng monoton wachsend für $\lambda > 0$ bzw. für $b > 1$.

b) Für $\lambda = 1$ gilt: $f(x) = f'(x)$
Die momentane Änderung zum Zeitpunkt x bei einem Wachstumsvorgang ist gleich dem Funktionswert f(x).

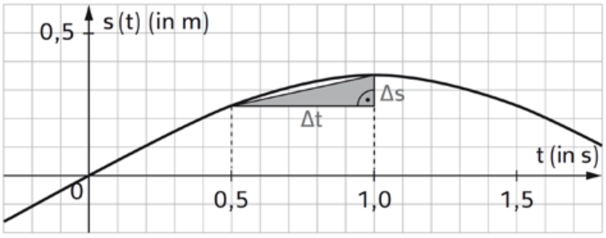
c) Zum Beispiel der Graph rechts (oder ähnliche Graphen mit $0 < b < 1$).
Wenn anstelle von $g'(x) < 0$ gilt:
$g'(x) > 0$, dann muss g streng monoton steigend sein, also $b > 1$ gelten.



7 a) $s(t) = 0{,}35 \cdot \sin\left(2\frac{\pi}{4} \cdot t\right)$



b) Der Differenzenquotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ gibt die durchschnittliche Geschwindidgkeit des Körpers im Intervall [0,5; 1] an.



$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(1) - s(0,5)}{1 - 0,5} \approx \frac{0,35 - 0,25}{0,5} = 0,20$

Die durchschnittliche Geschwindidgkeit ist ca. 0,20 m/s.

c) $s'(t) = 0,35 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{4} \cdot t\right)$; $s'(2) = 0,35 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{4} \cdot 2\right) \approx -0,55$ m/s

d) $s'(1) = 0,35 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{4} \cdot 1\right) = 0$

e) $s''(t) = -0,35 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{4} \cdot t\right)$;

$s''(1) = -0,35 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{4} \cdot 1\right) \approx -0,86$ m/s²

8 a) I_0 gibt die Amplitude an; in diesem Fall den Maximalwert der Stromstärke.

b) Ja, weil die Graphen der Sinus- und Cosinusfunktion dieselbe Form haben und zueinander um $\pi/2$ verschoben sind.

$I(t) = I_0 \cdot \cos(t) = I_0 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $I(t) = 0,002 \cdot \cos(50 \cdot t)$; $I'(t) = -0,002 \cdot 50 \cdot \sin(50 \cdot t)$;

$I'(3) = -0,002 \cdot 50 \cdot \sin(50 \cdot 3) \approx 0,071$ A = 71 mA

d) $\frac{dI}{dt}$ ist die momentane Änderungsrate der Stromstärke I oder die Ableitung der Stromstärke nach der Zeit t.

Kompetenzcheck Integralrechnung – Lösungen

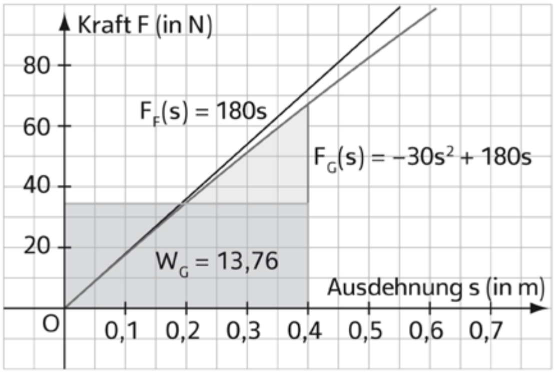
1	F – D – E – B
2	falsch – richtig – falsch – richtig – falsch
3	z. B.: $f(x) = 2x^3 - 3x + 4$, $f(x) = 2x^3 - 3x - 7$
4	falsch – falsch – richtig – richtig – falsch
5	E – D – B – F
6	$0{,}25 = \int_0^a x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big\vert_0^a = \frac{a^4}{4} \Rightarrow a = 1$
7	$O = f(1) \cdot 0{,}2 + f(1{,}2) \cdot 0{,}2 + f(1{,}4) \cdot 0{,}2 + f(1{,}6) \cdot 0{,}2 + f(1{,}8) \cdot 0{,}2$. Wird die Anzahl der Teilintervalle verringert, sinkt die Genauigkeit des Näherungswertes. Wird die Anzahl der Teilintervalle erhöht, dann steigt die Genauigkeit des Näherungswertes.

Typ-2-Aufgaben Integralrechnung – Lösungen

1 a) ...kleiner als ... die Fläche ....
[0; ∞[würde bedeuten, dass man die Expander beliebig weit ausdehnen könnte. Das entspricht nicht der Realität.

b) $W_F = \int_0^{0,4} 180s\,ds = 14,4$; $W_G = \int_0^{0,4} (-30s^2 + 180s)\,ds = 13,76$ (Joule)

$\int_0^{0,4} F\,ds = F \cdot 0,4 = 13,76 \Rightarrow F = 34,4$ (Newton)



2 a) $b(h) = \frac{2}{6}h + 5$; Der Ausdruck $7 \cdot \int_0^3 b(h)dh$ gibt das Fassungsvermögen der Vase (in ml) bis zu einer Höhe von 3 cm an.

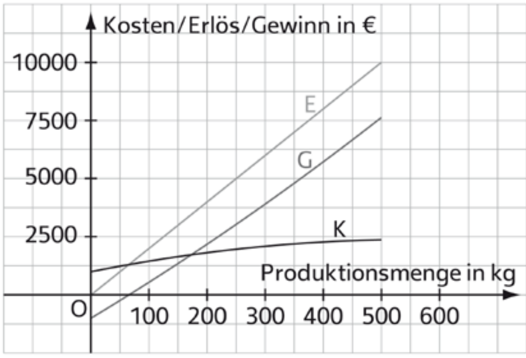
b) $500 = \int_0^x \left(\frac{7}{3}h + 35\right) dh = \frac{7}{6}h^2 + 35h$; $x = 10,57$. Das Wasser steht 10,57 cm hoch.

$\frac{7}{3}$ ist die Steigung der Funktion, die den Inhalt der Querschnittsfläche in der Höhe h angibt. Das heißt, die Querschnittsfläche der Vase nimmt mit jedem zusätzlichen Zentimeter um $\frac{7}{3}$ cm^2 zu.

3 a) $K'(100) = 4{,}1$ und $K'(500) = 0{,}5$.
Wenn die Produktion von 100 kg auf 101 kg gesteigert wird betragen die zusätzlichen Kosten ungefähr 4,1 €. Wenn bei 500 kg die Produktion um 1 kg erhöht wird, fallen zusätzliche Kosten von 0,5 € an. Bei höherer Produktion sinken die zusätzlichen Kosten für eine weitere Produktionseinheit. Der Anstieg der Kostenfunktion ist positiv, wird aber kleiner.

b) $K(x) = -0{,}0045x^2 + 5x + 1000$
$G(x) = 20x - (-0{,}0045x^2 + 5x + 1000) = 0{,}0045x^2 + 15x - 1000$
Ab 66 kg Chilischoten wird Gewinn erwirtschaftet.

c)



richtig – falsch – falsch –richtig - falsch

E. DORNER