Analysis

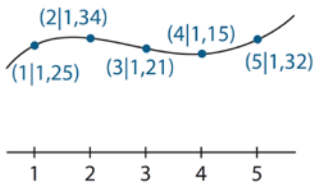
Kompetenzcheck Reelle Funktionen

1 Der Wintersportverein eines Orts plant den Neubau einer Schisprungschanze und sucht dazu ein geeignetes Gelände. Für den Aufsprungbereich und den Auslauf kommt ein Hang in Frage, dessen Verlauf näherungsweise durch die Funktion beschrieben werden kann:
$f(x) = 0{,}0004\,x^3 - 0{,}0278\,x^2 - 0{,}3333\,x + 50$ (x waagrechte Entfernung in m, y Höhe in m).

a) Zeichne den Graph der Funktion mit einem elektronischen Tool im Intervall [0; 60].
b) Welche Höhe y hat der Hang bei 30 m?
c) Bei welchem x-Wert beträgt die Höhe 40 m?
d) Wo liegt ungefähr der tiefste Punkt des Aufsprungbereichs?
e) In welchem Intervall ist die Funktion monoton fallend und wo monoton steigend?

2 Die Tabelle zeigt den Benzinpreis in den ersten fünf Monaten eines Jahres (jeweils am 1.).

Monat	Benzinpreis
Jänner	1,25 €
Februar	1,34 €
März	1,21 €
April	1,15 €
Mai	1,32 €



Berechne
a) die absolute Änderung des Benzinpreises im Zeitraum vom 1.1. bis zum 1.2.;
b) die mittlere Änderung im Zeitraum vom 1.1. bis zum 1.3.;
c) die relative Änderung im Zeitraum vom 1.2. bis zum 1.5.;
d) die prozentuelle Änderung im Zeitraum vom 1.3. bis zum 1.5.;
e) den Änderungsfaktor im Zeitraum vom 1.1. bis zum 1.5.

3 Gegeben ist die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 3x - 1$.
Kreuze die beiden für f zutreffenden Aussagen an.

Die Funktion hat eine Nullstelle x = 0, weil der Graph die y-Achse bei (0 | −1) schneidet.	☐
Die Funktion ist im Intervall $]-\infty; -1]$ streng monoton steigend.	☐
Die Funktion besitzt zwei lokale Extremstellen.	☐
Der Graph der Funktion verläuft in einem Koordinatensystem von „links unten" nach „rechts oben", deshalb ist die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ monoton steigend.	☐
Die Funktion hat genau drei positive Nullstelle.	☐

4 Bewegt sich ein Körper der konstanten Masse m mit der Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit Radius r, so ist dafür die Zentripetalkraft $F(v, r) = m \cdot \frac{v^2}{r}$ erforderlich.

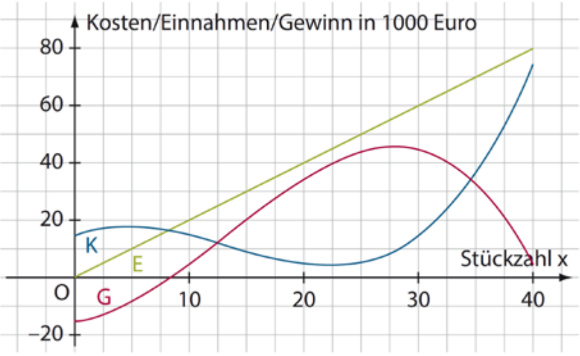
(1) Durch welchen Funktionstyp wird die Abhängigkeit von F bezüglich des Radius r (bei konstantem v) beschrieben?
(2) Welche Kraft wirkt bei der dreifachen Geschwindigkeit (bei konstantem r)?
(3) Interpretiere den Funktionswert F (3 v, 3 r). Wie verhält sich das Ergebnis zu F (v, r)?
(4) Auf welchen Wert muss die Geschwindigkeit erhöht werden, damit bei gleicher Kreisbahn die zehnfache Kraft wirkt?

Analysis

Typ-2-Aufgaben Reelle Funktionen

1

In einem kleinen Betrieb werden Spezialgeräte hergestellt und verkauft. Bei der Produktion von x Stück eines Produktes innerhalb eines Jahres fallen Herstellungskosten K an. Der Gewinn G ergibt sich aus den Einnahmen E und den Kosten K.



a) Lies für die Gewinnfunktion G die Nullstelle x_1 und die Extremstelle x_2 ab. Gib die Funktionswerte $G(x_1)$ und $G(x_2)$ an. Welche Bedeutung haben die vier Werte für den Betrieb?

b) Ermittle mithilfe der Grafik ΔE sowie den Differenzenquotienten im Intervall [10; 30]. Interpretiere ΔE bzw. den Differenzenquotienten im vorliegenden Zusammenhang.

c) Beschreibe das Monotonieverhalten der Kostenfunktion im Intervall [0; 40] und die praktische Bedeutung.

d) Zeige für x = 15, dass $G(x) = E(x) - K(x)$ gilt. Bei welchen jährlichen Stückzahlen macht der Betrieb Verlust, bei welchen Gewinn?

2 Bei einem Hochwasser tritt endlich Entspannung ein. Der Pegelstand des Flusses hat seine höchste Marke von 4,80 m erreicht und sinkt nun. Die Höhe des Pegelstandes für die folgenden 10 Stunden kann durch die Funktion h (t) mit t in Stunden und h in m beschrieben werden.

a) Die Höhe des Pegelstandes wird durch $h_1(t) = 4{,}80 - 0{,}30\,t$ beschrieben.
Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an.
- ☐ Die absoluten Änderungen von h in den Zeitintervallen [1; 3] und [3; 6] sind gleich groß.
- ☐ Die mittleren Änderungen von f in den Zeitintervallen [1; 3] und [3; 6] sind gleich groß.
- ☐ Die prozentuellen Änderungen von f in den Zeitintervallen [1; 3] und [3; 6] sind gleich groß.

b) Die Höhe des Pegelstandes wird durch $h_2(t) = 4{,}0 \cdot 0{,}9375^t$ beschrieben.
Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an.
- ☐ Die absoluten Änderungen von h in den Zeitintervallen [1; 3] und [3; 6] sind gleich groß.
- ☐ Die mittleren Änderungen von f in den Zeitintervallen [1; 3] und [3; 6] sind gleich groß.
- ☐ Die prozentuellen Änderungen von f in den Zeitintervallen [1; 3] und [4; 6] sind gleich groß.

c) Welches Monotonieverhalten liegt bei den Funktionen h_1 bzw. h_2 im Intervall [0; 10] vor? Wie kann das Monotonieverhalten jeweils aus dem Funktionsterm abgelesen werden?

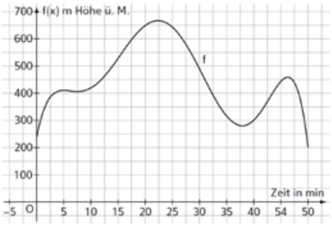
d) Existiert für die Funktionen h_1 bzw. h_2 im Intervall [0; 10] eine Nullstelle? Existiert für die Funktionen h_1 bzw. h_2 eine Nullstelle, wenn die Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind? Begründe.

Kompetenzcheck Differentialrechnung

1 Gegeben ist eine quadratische Funktion f mit $f(x) = -3x^2 + 4$. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an.

$f'(0) = 2$	$f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$	$f'(0) = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$	$f'(0) = -6$	$f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$
☐	☐	☐	☐	☐

2 Die Abbildung zeigt das Höhenprofil eines 50 Minuten langen Segelflugs.



Ermittle näherungsweise den Differenzenquotienten im Intervall [30; 35] und interpretiere das Ergebnis im Kontext des Segelflugs.

3 Die in Aufgabe 2 abgebildete Polynomfunktion h beschreibt die Höhe eines Segelflugs in Abhängigkeit von der Zeit. Kreuze die zutreffende(n) Aussagen an.

$h'(15) > 0$	☐
$h'(42) < 0$	☐
Der Differenzenquotient von h im Intervall [5; 10] beschreibt die durchschnittliche Änderung der Flughöhe von der fünften bis zur zehnten Flugminute.	☐
Der Differentialquotient von h an der Stelle $t = 40$ beschreibt die momentane Änderung der Flughöhe nach 40 Flugminuten.	☐
$h'(30)$ gibt die momentane Änderung der Flughöhe nach 30 Flugminuten an.	☐

4 Für einen frei fallenden Körper ist die Zeit-Weg-Funktion s näherungsweise durch $s(t) = 5t^2$ mit t in Sekunden und s in Metern gegeben.
Berechne die mittlere Geschwindigkeit des fallenden Körpers im Intervall [1; 3].

5 Für einen frei fallenden Körper ist die Zeit-Weg-Funktion s näherungsweise durch $s(t) = 5t^2$ mit t in Sekunden und s in Metern gegeben.
Berechne die Momentangeschwindigkeit des fallenden Körpers zum Zeitpunkt $t = 4$.

6 Für einen frei fallenden Körper ist die Zeit-Weg-Funktion s näherungsweise durch $s(t) = 5t^2$ mit t in Sekunden und s in Metern gegeben.
Ermittle jene Funktion, die die Beschleunigung des Körpers für jeden Zeitpunkt t angibt.

7 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{4x}$. Gib f' an.

8 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$. Gib f' und f'' an.

9 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \cos(3x)$. Gib f' und f'' an.

10 Gegeben sind vier Funktionen. Ordne den Funktionen die passende 1. Ableitung zu.

$f(x) = e^{2x}$	
$f(x) = (2x)^3$	
$f(x) = 3x^2$	
$f(x) = 3x^4 - 2x$	

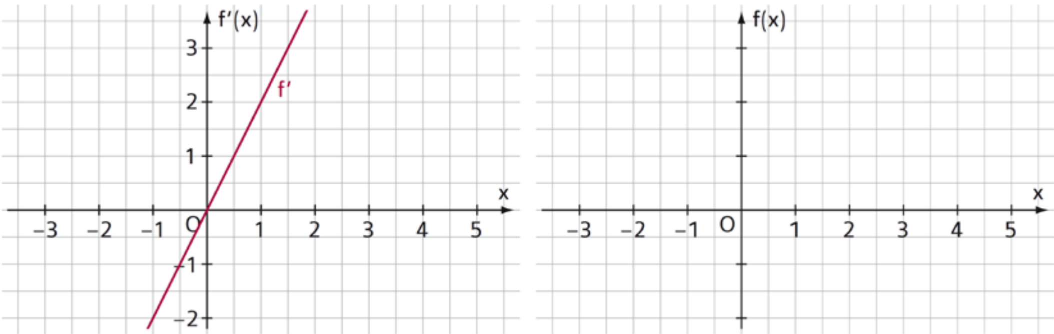
A	$f'(x) = 24x^2$
B	$f'(x) = 9x$
C	$f'(x) = 12x^3 - 2$
D	$f'(x) = 2e^{2x}$
E	$f'(x) = -2e^{2x}$
F	$f'(x) = 6x$

11 Gegeben sind vier Funktionen und sechs Ableitungsfunktionen. Ordne den Funktionen die richtige Ableitungsfunktion f′ zu.

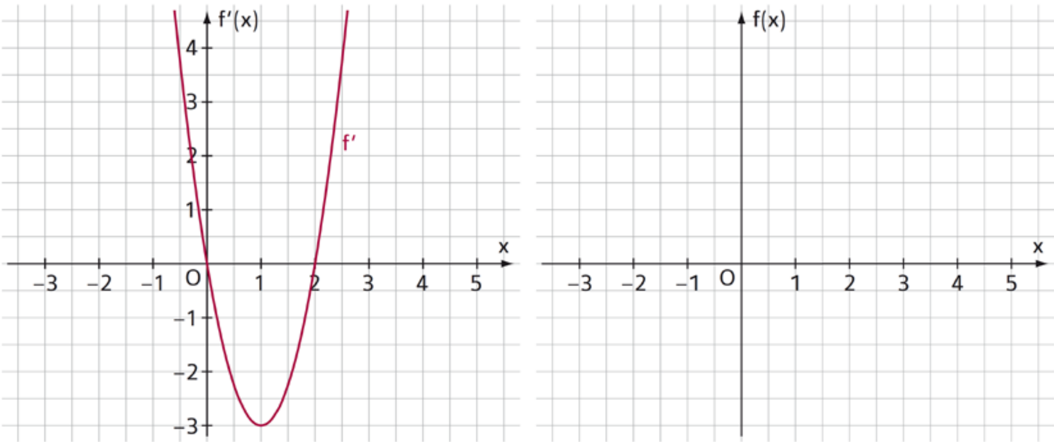
$f(x) = 2 \cdot \sin(x) + \cos(x)$	
$f(x) = \cos(x) - 2 \cdot \sin(x)$	
$f(x) = 2 \cdot \sin(x) - \cos(x)$	
$f(x) = -\cos(x) - 2 \cdot \sin(x)$	

A	$f'(x) = -2 \cdot \cos(x) + \sin(x)$
B	$f'(x) = -2 \cdot \cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$
C	$f'(x) = 2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$
D	$f'(x) = -\cos(x) - \sin(x)$
E	$f'(x) = -2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$
F	$f'(x) = 2 \cdot \cos(x) + \sin(x)$

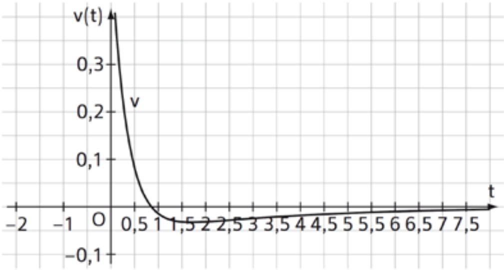
12 Für eine Polynomfunktion f gilt: $f(0) = -1$. Der Graph der Ableitungsfunktion f′ der gegebenen Polynomfunktion f ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt. Skizziere im Koordinatensystem daneben den Graphen von f.



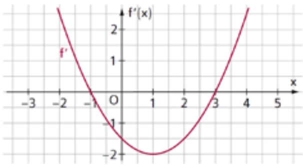
13 Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f. f′ ist eine quadratische Funktion. Für f gilt: $f(0) = 4$.
Skizziere im Koordinatensystem daneben den Graphen von f.

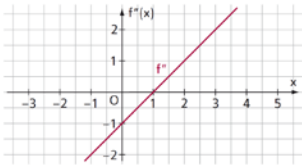


14 Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion v, welcher die momentane Änderung der Konzentration eines Medikaments im Blut eines Menschen zeigt. Die Zeit t wird in Stunden gemessen, die Konzentration des Medikaments im Blut in mg/ℓ. Gib näherungsweise an, in welchem Zeitintervall die Konzentration des Medikaments im Blut abnimmt bzw. zunimmt und zu welcher Zeit die Konzentration des Medikaments im Blut am höchsten ist.

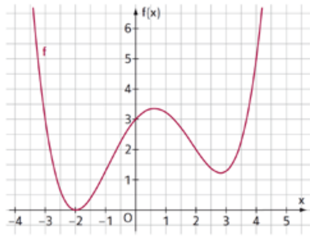


15 Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Graphen der Ableitungsfunktionen f′ und f″. Beschreibe das Monotonieverhalten und die Krümmung von f.





16 Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f. Außerhalb des dargestellten Bereichs existieren keine weiteren Extrem- bzw. Wendestellen.
Vervollständige den Satz, sodass er mathematisch korrekt ist.
Die ___①___ , weil die Funktion f __②___ hat.



①	
erste Ableitung f′ hat mindestens Grad 3	☐
zweite Ableitung f″ hat Grad 1	☐
erste Ableitung f′ hat Grad 4	☐

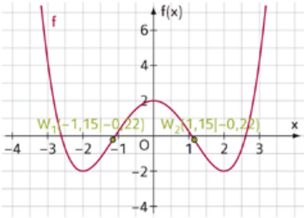
②	
genau eine Nullstelle	☐
genau zwei Wendepunkte	☐
drei Extremstellen	☐

17 Gegeben ist eine Polynomfunktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Für f gilt: $f(-1) = -4$, $f'(-1) = 0$, $f(3) = 4$, $f'(3) = 0$ und $f''(1) = 0$.
Verschaffe dir mit den gegebenen Informationen eine Überblick über den Verlauf des Graphen der Funktion und kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an.

Für alle $x \in]-1; 3[$ gilt: $f'(x) < 0$.	☐
Für alle $x \in]1; \infty[$ gilt: $f''(x) < 0$.	☐
Für alle $x \in]-1; 3[$ gilt: $f'(x) > 0$.	☐
Für alle $x \in]-\infty; 1[$ gilt: $f''(x) > 0$.	☐
Für alle $x \in]-1; 3[$ gilt: $f'(x) \geq 0$.	☐

18 Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f vom Grad 4. Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an.

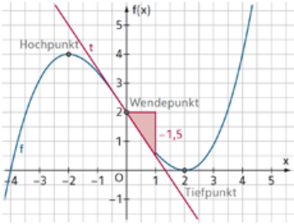
$f'(-2) = f'(0)$	☐
$f''(0) = f'(0)$	☐
$f'(-0{,}5) > f'(0{,}5)$	☐
$f'(2) < f'(3)$	☐
$f''(-0{,}5) < f''(1{,}5)$	☐



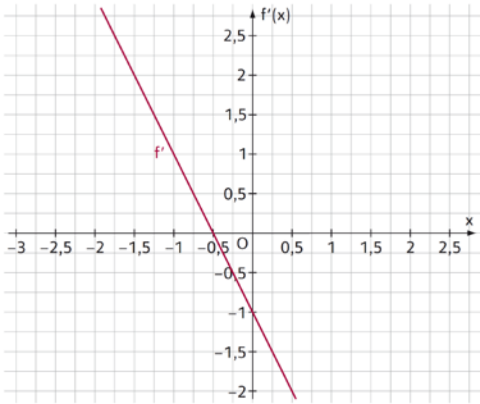
19 Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f vom Grad 3. Ordne den Ausdrücken der linken Spalte den passenden Wert der rechten Spalte zu.

$f(0) =$	
$f''(0) =$	
$f'(0) =$	
$f(4) =$	

A	1
C	2
D	0
E	$-1{,}5$
F	4



20 Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f′ einer Polynomfunktion f.
Vervollständige den Satz, sodass er mathematisch korrekt ist.

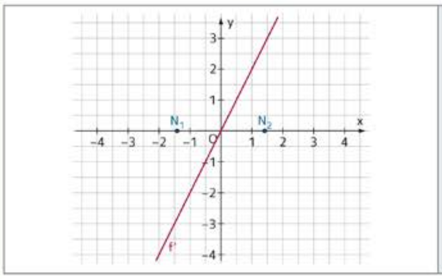


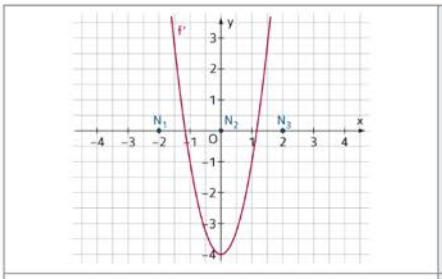
Die Funktion f hat an der Stelle $x = -0{,}5$ eine ___❶___, weil ___❷___.

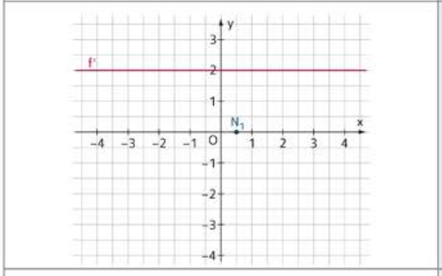
❶	
lokale Minimumstelle	☐
Wendestelle	☐
lokale Maximumstelle	☐

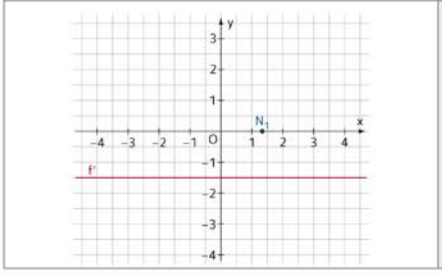
	❷
☐	$f'(-0{,}5) = 0$ und daher die Tangente im Punkt $(-0{,}5\,|\,f(-0{,}5))$ die Steigung 0 hat. Außerdem ist f′ für alle $x < -0{,}5$ positiv und f′ für alle $x > -0{,}5$ negativ. Das bedeutet, dass für alle $x < -0{,}5$ die Funktion steigt und für $x > 0{,}5$ die Funktion fällt.
☐	$f'(-0{,}5) = 0$ bedeutet, dass sich das Krümmungsverhalten von f an der Stelle $x = -0{,}5$ ändert.
☐	f′ an der Stelle $x = -0{,}5$ einen Vorzeichenwechsel aufweist, die Tangente im Punkt $(-0{,}5\,|\,f(-0{,}5))$ die Steigung 0 hat und f für alle x fällt.

21 Die Abbildungen der linke Spalte zeigen die Graphen der Ableitungsfunktion f′ von f und die Nullstelle(n) von f. Ordne den passenden Funktionsgraphen von f zu.

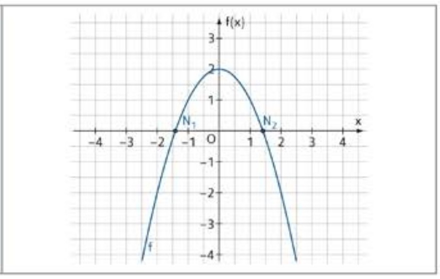




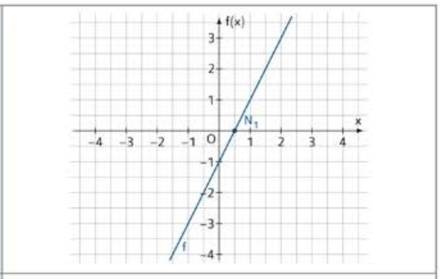




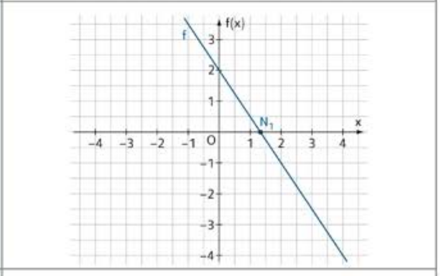
A



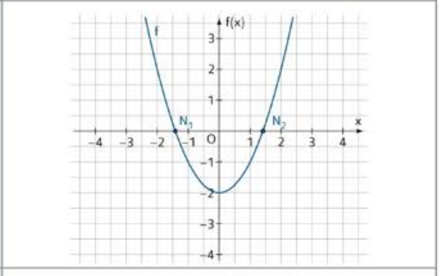
B



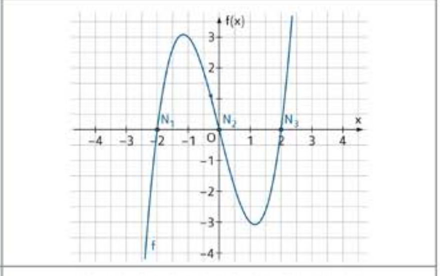
C



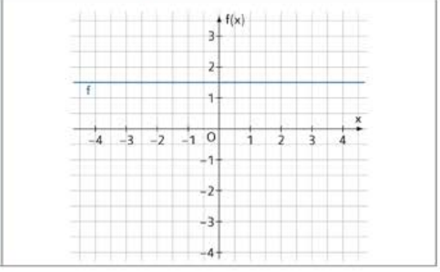
D



E



F



Typ-2-Aufgaben Differentialrechnung

1

Notsignal

Auf Schiffen gibt es Signalpistolen, aus denen bei Seenot ein rotes Leuchtsignal abgefeuert wird. Das Leuchtsignal soll möglichst senkrecht nach oben abgeschossen werden. Für einen bestimmten Signalkörper gilt folgender Zusammenhang zwischen der Zeit t (in Sekunden) und der Höhe h (in Meter) über dem Boden: $h(t) = -5t^2 + 30t + 2$.

a) Stelle die Funktion h(t) vom Zeitpunkt des Abschusses bis zum Aufschlagen auf der Wasseroberfläche grafisch dar.

b) Gib einen für den Kontext sinnvollen Definitionsbereich an. Gib notwendige Überlegungen und Berechnungen für die Intervallgrenzen des Definitionsbereiches an.

c) Berechne h(0) und interpretiere das Ergebnis im vorliegenden Zusammenhang.

d) Welche maximale Höhe erreicht das Leuchtsignal? Nach wie viel Sekunden wird diese maximale Höhe erreicht? Berechne die entsprechenden Werte mit den Mitteln der Differentialrechnung. Begründe, warum diese Vorgangsweise geeignet ist.

e) Berechne $\frac{dh}{dt}(0)$. Welche Bedeutung hat der Ausdruck im vorliegenden Kontext? Zu welchem Zeitpunkt (innerhalb des Definitionsbereiches) hat das Leuchtsignal seine größte Geschwindigkeit? Begründe. Was lässt sich über die Beschleunigung des Leuchtsignals aussagen und welche Auswirkung hat der entsprechende Wert auf den Graphen von h?

2

Aufsprunghügel einer Skisprunganlage

Der Verlauf des Aufsprunghügels einer Skisprunganlage vom Schanzentisch bis zum Auslauf kann im Intervall [0; 135] durch die Funktion $h(x) = \frac{x^3}{9000} - \frac{x^2}{50}$ beschrieben werden. Dabei ist x die waagrechte Entfernung vom Schanzentisch und h(x) die Höhe in Bezug auf den Schanzentisch in Meter.

a) Der Bereich, in dem ein Skispringer oder eine Skispringerin normalerweise landet, ist nach dem Schanzentisch zunächst negativ gekrümmt und zum Auslauf hin positiv gekrümmt. Der Übergang zwischen den beiden Krümmungen wird als **K-Punkt** (kritischer Punkt, Konstruktionspunkt bzw. Kalkulationspunkt) bezeichnet. Bei hohen Weiten erfolgt die Landung nach diesem Punkt in immer flacher werdendem Gelände, die einwirkenden Kräfte nehmen zu und der Sprung ist immer schwieriger zu stehen.

Berechne die Koordinaten des K-Punktes des Aufsprunghügels mit den Mitteln der Differentialrechnung und begründe die Vorgangsweise. Zeige, dass das im Informationstext beschriebene Krümmungsverhalten auch auf h(x) zutrifft.

b) Der **Auslauf** ist ein leicht ansteigender Gegenhang zur raschen Verringerung der Geschwindigkeit.
Ermittle, in welcher (waagrechten) Entfernung vom Schanzentisch dieser Gegenhang beginnt und wie viele Meter der tiefste Punkt des Aufsprunggeländes unterhalb des Schanzentisches liegt. Zeige rechnerisch, dass $h(x)$ nach dem tiefsten Punkt wieder ansteigt.

c) Die Größe einer Skisprungschanze wird durch den **Hill-Size-Punkt** beschrieben. Dies ist jener Punkt des Auslaufs, bei dem der Hang eine Neigung von 32° hat. Der Hill-Size-Punkt liegt zwischen K-Punkt und tiefstem Punkt.
Welcher Steigung entspricht ein Neigungswinkel von 32°? Bestimme rechnerisch, in welcher (waagrechten) Entfernung vom Schanzentisch sich der Hill-Size-Punkt befindet. Ermittle die Gleichung der Tangente an h in diesem Punkt.

3

Kosten- und Preistheorie: Gewinn

Ein Unternehmen verkauft sein Produkt zum Preis von 120 Geldeinheiten (GE) pro Mengeneinheit (ME).
Die Produktionskosten lassen sich annähernd durch die Kostenfunktion $K(x) = 5x^3 - 39x^2 + 124x + 204$ beschreiben. Der Erlös des Produkts lässt sich durch die Funktion $E(x) = 120x$ darstellen. Mit der Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x) = -5x^3 + 39x^2 - 4x - 204$ lässt sich der Gewinn des Produkts beschreiben.

a) Stelle Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion im Intervall [0 ME; 9 ME] grafisch dar.

b) Unter der **Gewinnschwelle** versteht man die erste Nullstelle der Gewinnfunktion im positiven Bereich. Unter der **Gewinngrenze** wird die zweite Nullstelle im positiven Bereich verstanden.
Bestimme die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze der Gewinnfunktion $G(x)$.

c) Die **gewinnmaximale Produktionsmenge** ist die Maximumstelle der Gewinnfunktion zwischen Gewinnschwelle und Gewinngrenze.
Bestimme die gewinnmaximale Produktionsmenge sowie den maximalen Gewinn.

d) Die **Grenzkosten** geben die Steigung der Kostenfunktion an. Gib die Funktion $K'(x)$ der Grenzkosten an. Die Stelle, an der die Grenzkosten **minimal** sind, wird **Kostenkehre** genannt.
Bei welcher Produktionsmenge sind die Grenzkosten am geringsten? Wie hoch sind diese?

4

Kosten- und Preistheorie: Produktionskosten

Die Produktionskosten eines Produkts lassen sich näherungsweise mit der Funktion $K(x) = x^3 - 25x^2 + 250x + 1000$ beschreiben.

a) Untersuche den Verlauf der Grenzkostenfunktion $K'(x)$ hinsichtlich ihres maximalen bzw. minimalen Anstiegs.

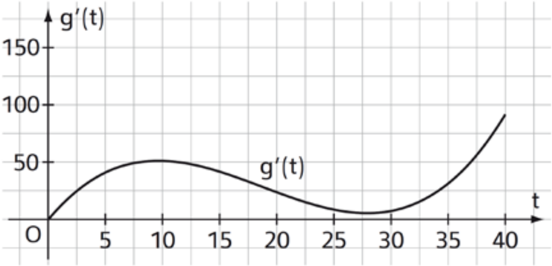
b) Als **Kostenkehre** bezeichnet man den Übergang von degressiven zu progressiven Kosten. Diese Produktionsmenge mit ihren dazugehörigen Gesamtkosten entspricht dem Wendepunkt der Kostenfunktion.
Berechne die Kostenkehre bzw. jene Produktionsmengen mit degressivem bzw. progressivem Kurvenverlauf.

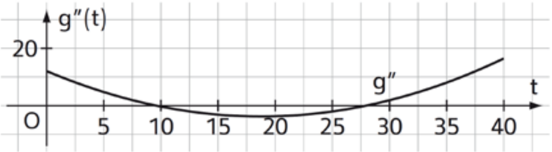
c) Beschreibe den Einfluss einer Erhöhung der Fixkosten am Funktionsgraphen.

5

Weltbevölkerung und weltweite Getreideproduktion

Die Entwicklung der Weltbevölkerung kann für den Zeitraum von 1970 bis 2010 näherungsweise mit der Funktion $w(t) = 3691 \cdot e^{0{,}0156985t}$ ($w(t)$ in Millionen, t in Jahren) beschrieben werden. Die Entwicklung der weltweiten Getreideproduktion in Millionen Tonnen kann für den Zeitraum von 1970 bis 2010 näherungsweise durch die Polynomfunktion g, die Grad 4 hat, beschrieben werden.
Die beiden Abbildungen zeigen die Ableitungsfunktionen g' und g''. $t = 0$ steht für das Jahr 1970.





a) Zeichne näherungsweise den Verlauf der Polynomfunktion g, wenn für g gilt: $g(0) = 1193$, $g(40) = 2433$ und $1993 < g(x) < 2433$ für alle x $]0; 40[$ und interpretiere den Verlauf von g im Kontext der weltweiten Getreideproduktion.
b) Berechne w' und erläutere den Verlauf von w' im Kontext der Entwicklung der Weltbevölkerung.
c) Der Wert von $\frac{g(10) - g(0)}{10}$ beträgt 35,7. Berechne $\frac{w(10) - w(0)}{10}$. Erläutere die Bedeutung dieser beiden Werte im jeweiligen Kontext.

6

Vergleich von Wachstumsmodellen

Gegeben sind die zwei Wachstumsmodelle $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$, $g(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.
a) Gib an, für welche, $b \in \mathbb{R}^+$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktionen f und g streng monoton wachsend sind.
b) Gib an, für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = f'(x)$. Erläutere diese Eigenschaft von f im Kontext eines Wachstumsvorganges.
c) Skizziere den Graphen einer Funktion $g(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $g(x) > 0$, $g'(x) < 0$, $g''(x) > 0$ und $g(0) = 1$. Beschreibe, wie sich der Graph von g ändert, wenn anstelle von $g'(x) < 0$ gilt: $g'(x) > 0$.

7

Harmonische Schwingung

Harmonische Schwingungen können mathematisch in der Form $s(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$ beschrieben werden. A gibt dabei die Amplitude, ω die Winkelgeschwindigkeit der Schwingung an und t die Zeit. ω steht mit der Frequenz f bzw. mit der Schwingungsdauer T in folgendem Zusammenhang: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

Ein Körper schwingt mit einer Amplitude von 0,35 m und einer Schwingungsdauer von 4 Sekunden.

a) Gib die Funktionsgleichung dieser Schwingung an und zeichne den Graphen der Funktion.

b) Welche Bedeutung hat $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ im Intervall [0,5; 1] im Zusammenhang mit dieser Aufgabenstellung?
Stelle die Größen Δs und Δt für das angegebene Intervall grafisch dar und berechne den Wert des Ausdrucks $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

c) Welche momentane Geschwindigkeit hat der Körper nach 2 Sekunden?

d) Zeige, dass der Körper zum Zeitpunkt nach 1 Sekunde in Ruhe ist.

e) Welche Beschleunigung hat der Körper nach 1 Sekunde?

8

Stromstärke eines Wechselstroms

Die Stromstärke I eines Wechselstroms wird durch $I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ beschrieben (ω Winkelgeschwindigkeit bzw. Kreisfrequenz in s^{-1}, t Zeit in s, I in A).

a) Welche Bedeutung hat die Konstante I_0 in diesem Kontext?

b) Kann die Stromstärke für den Fall von $\omega = 1\,s^{-1}$ auch durch einen Sinusterm angegeben werden?
Begründe deine Entscheidung. Wenn ja, dann gib den entsprechenden Term für $I(t)$ an.

c) Berechne $I'(3)$ für $I_0 = 2\,mA$ und $\omega = 50\,s^{-1}$.

d) Ein physikalisches Gesetz im Zusammenhang mit der Induktionsspannung U in einer Spule lautet:

$$U = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

L ist in diesem Fall eine Konstante (die Induktivität der Spule).
Was bedeutet der Ausdruck $\frac{dI}{dt}$?

Kompetenzcheck Integralrechnung

1 Ordne den Funktionen der linken Spalte eine passende Stammfunktion der rechten Spalte zu.

$f(x) = x$	
$f(x) = \sin(x)$	
$f(x) = \cos(x)$	
$f(x) = e^x$	

A	$F(x) = -\sin(x)$
B	$F(x) = e^x$
C	$F(x) = x \cdot e^x$
D	$F(x) = -\cos(x)$
E	$F(x) = \sin(x)$
F	$F(x) = 0{,}5 \cdot x^2$

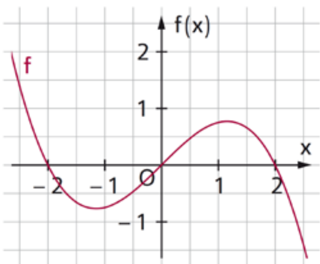
2 Gegeben sind die Polynomfunktionen f und g mit $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ und $g(x) = -x^4 + 3x^3 - 2$.
Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an.

Die Funktion $h(x) = x^3 - x^2 + x$ ist eine Ableitungsfunktion von f.	☐
Die Funktion $h(x) = -4x^3 + 9x^2$ ist eine Ableitungsfunktion von g.	☐
Die Funktion $h(x) = 6x - 2$ ist eine Stammfunktion von f.	☐
Die Funktion $h(x) = -0{,}2x^5 + 0{,}75x^4 - 2x$ ist eine Stammfunktion von g.	☐
Die Funktion $h(x) = -4x^3 + 9x^2 - 2x$ ist eine Ableitungsfunktion von g.	☐

3 Von einer Funktion f ist die Ableitungsfunktion f′ mit $f'(x) = 6x^2 - 3$ gegeben.
Gib zwei mögliche Funktionsgleichungen für f an.

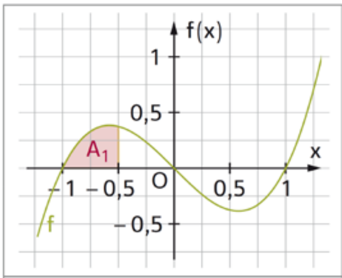
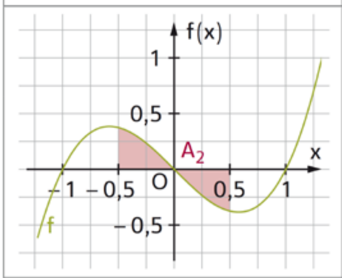
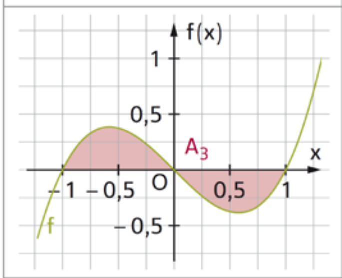
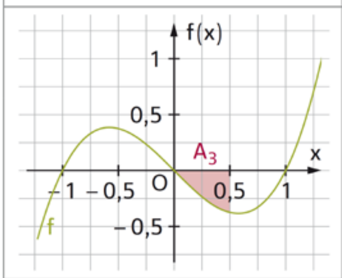
4 Für die hier abgebildete punktsymmetrische Funktion f mit den Nullstellen $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$ sind 5 Aussagen gegeben.
Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an.

$\int_0^2 f(x)\,dx = 2$	☐
$\left\lvert \int_{-2}^0 f(x)\,dx \right\rvert + \int_0^2 f(x)\,dx = 4$	☐
$\int_0^2 f(x)\,dx = \left\lvert \int_{-2}^0 f(x)\,dx \right\rvert$	☐
$\int_{-2}^0 f(x)\,dx < 0$	☐
$\int_0^1 f(x)\,dx < 0$	☐



E. DORNER

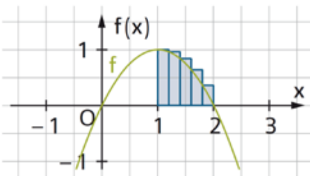
5 Ordne den dargestellten Flächen das passende Integral einer Polynomfunktion 3. Grades mit dem Wendepunkt W (0 | 0) zu.

A	$\int_{-0,5}^{0,5} f(x)\,dx$
B	$2 \cdot \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$
C	$2 \cdot \int_{0}^{1} f(x)\,dx$
D	$\int_{-0,5}^{0} f(x)\,dx + \left| \int_{0}^{0,5} f(x)\,dx \right|$
E	$\int_{-1}^{-0,5} f(x)\,dx$
F	$\left| \int_{0}^{0,5} f(x)\,dx \right|$

6 Der Inhalt derjenigen Fläche, die vom Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3$, der positiven x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = a$ $(a \in \mathbb{R})$ eingeschlossen wird, beträgt 0,25 Flächeneinheiten.
Berechne den Wert von a.

7 Der Graph der hier abgebildeten Funktion f schließt mit der x-Achse im Intervall [1; 2] ein Flächenstück ein. Beschreibe formal die in der Abbildung dargestellte Obersumme und erläutere, wie sich die Anzahl der Teilintervalle auf die Genauigkeit des Näherungswerts für den Flächeninhalt auswirkt.



Typ-2-Aufgaben Integralrechnung

1 **Fitnessgeräte**

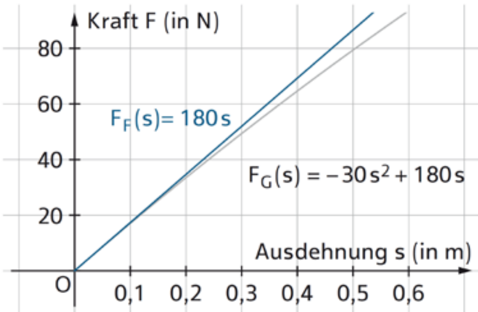
Im Krafttraining kommen unterschiedliche Geräte zum Einsatz. So gibt es beispielsweise Expander mit einer Feder oder einem Gummiband und andere Trainingsgeräte, die mit Gewichten ausgestattet sind.



Die Ausdehnung einer Feder folgt einem linearen Kraftgesetz, während dagegen die Kraft bei der Ausdehnung eines Gummibandes nicht linear ansteigt. Bei Trainingsgeräten mit Gewichten bleibt die Kraft, die man aufwenden muss, um ein bestimmtes Gewicht zu heben, immer gleich groß.

Die Abbildung zeigt die Graphen für die Kräfte, die bei einer Feder und bei einem Gummiband wirken.

Bei einer Feder kann sie in der Form $F_F(s) = k \cdot s$ (k Federkonstante) und bei einem Expander mit Gummiband näherungsweise durch $F_G(s) = -30s^2 + 180s$ beschrieben werden (Kraft F_F und F_G in N, Ausdehnung s in m).



a) Vervollständige den folgenden Satz, sodass er mathematisch und inhaltlich korrekt ist.

Die Arbeit, die man beim Dehnen einer Feder von 10 cm auf 20 cm verrichtet, ist ____①____ die Arbeit beim Dehnen von 30 cm auf 40 cm, weil ____②____.

①	
größer als	☐
gleich groß wie	☐
kleiner als	☐

②	
die Steigung der Geraden zunimmt	☐
die Fläche unter der Kurve zwischen 0,3 und 0,4 größer als die Fläche zwischen 0,1 und 0,2 ist	☐
die beiden Ausdehnungen gleich groß sind	☐

Begründe, warum für die modellhafte Beschreibung der wirkenden Kräfte die Definitionsmenge nicht $[0; \infty[$ sein kann.

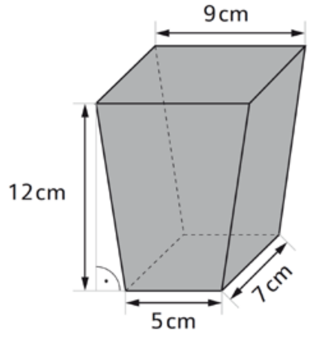
b) Der Expander mit einer Feder und jener mit einem Gummiband werden auf 40 cm ausgedehnt. Berechne in beiden Fällen die zu verrichtende Arbeit.

Welche konstante Kraft müsste bei einem Trainingsgerät mit Gewichten angewendet werden, damit beim Heben der Gewichte um 40 cm dieselbe Arbeit wie bei der Dehnung eines Gummibands verrichtet wird?

Stelle jeweils die Arbeit, die bei der Ausdehnung eines Gummibands auf 40 cm bzw. beim Heben eines Gewichts um 40 cm verrichtet werden muss, in der Grafik dar.

2 **Vase**

Der Innenraum einer 12 cm hohen Vase hat in jeder Höhe h eine rechteckige horizontale Querschnittsfläche. Die Abmessungen des Vasenbodens betragen 5 cm und 7 cm. Die Breite von 5 cm nimmt linear bis zur Vasenoberkante auf 9 cm zu.



a) Gib eine Formel für die Breite b(h) der rechteckigen Querschnittsfläche in Abhängigkeit von h an.
Erkläre, welche Bedeutung der Ausdruck $7 \cdot \int_0^3 b(h)\,dh$ im Zusammenhang mit dem Befüllen der Vase hat.

b) Das Fassungsvermögen der Vase (in ml) kann bis zur Höhe x durch das Integral $\int_0^x \left(\frac{7}{3}h + 35\right)dh$ beschrieben werden. Berechne, wie hoch das Wasser in der Vase steht, wenn 0,5 Liter Wasser eingefüllt werden.
Welche Bedeutung hat der Wert $\frac{7}{3}$ im Zusammenhang mit dem Füllvorgang?

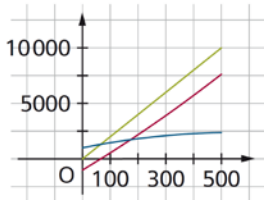
3 **Produkteinführung**

Familie Sulzmann möchte Chilischoten pflanzen. Bei Selbstvermarktung lassen sich nach ihren Recherchen für 1 kg frische Habanero-Chilis etwa 20 € erzielen. Die maximale Produktionskapazität für die erste Saison liegt bei 500 kg. Die fixen Kosten werden mit 1000 € geschätzt. Die Grenzkostenfunktion K′ wird durch $K'(x) = 5 - 0{,}009x$ beschrieben, wobei x die Produktionsmenge in kg angibt.

a) Berechne die Grenzkosten für 100 kg und für 500 kg Chilischoten. Interpretiere die Ergebnisse aus betriebswirtschaftlicher Sicht.

b) Ermittle mithilfe der angeführten Informationen die Kostenfunktion K mit $K: x \mapsto K(x)$ und die entsprechende Gewinnfunktion G mit $G: x \mapsto G(x)$. Beurteile mithilfe des mathematischen Modells, bei welchen Produktionsmengen Familie Sulzmann Gewinn erwirtschaften kann.

c) Eine grafische Darstellung soll die betriebswirtschaftlichen Aspekte der geplanten Produkteinführung veranschaulichen.
Ergänze in der Abbildung die fehlenden Beschriftungen: Achsenbeschriftungen mit Größe und Einheit, Kostenfunktion K, Erlösfunktion E und Gewinnfunktion G.
Kreuze die beiden Aussagen an, die im vorliegenden Kontext zutreffend sind.



Die Kosten verlaufen degressiv, weil die Kostenfunktion K streng monoton steigend und wegen $K''(x) = -0{,}009$ negativ gekrümmt ist.	☐
Die Erlösfunktion E wird beschrieben durch $E(x) = 1000 + 20x$.	☐
Die Gewinnfunktion ist wegen $K'(x) = 5 - 0{,}009x$ eine lineare Funktion.	☐
Für den Break-even-Point des Gewinns gilt: $G(x) = 0$ und $G'(x) > 0$.	☐
Das Integral $\int_{100}^{200} K'dx$ gibt an, wie hoch die Kosten für die Produktion von 100 bis 200 kg Chilischoten sind.	☐