Funktionale Abhängigkeiten

Kompetenzcheck Funktionen – Lösungen

1
a) 1 160 000, 1 270 000;
b) Schuljahr 1980/81;
c) 1969/70 und 1983/84;
d) z. B. 1930 bis 1940, 1960 bis 1970, 1970 bis 1980

2
Abb. A, Abb. B, Abb. E und Abb. F sind Graphen von Funktionen.

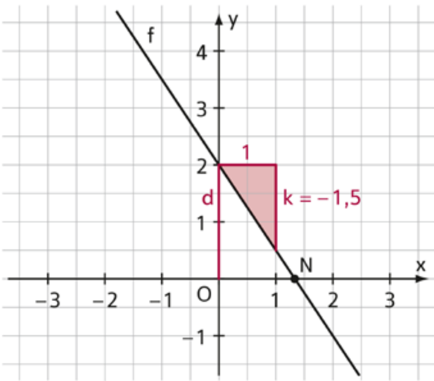
3
$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $Z = \mathbb{R}$; $f(10) = 2{,}4$; $f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ und
$f(-2) = \frac{1}{4} \cdot (-2) - \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$; Nullstelle

4
a) Sarah, da ihre Geschwindigkeit bis 50 m nach dem Start stets am größten ist.
b) Phillip ist am schnellsten, da der Funktionswert (die Geschwindigkeit) im Ziel am höchsten ist. Sarah ist am langsamsten, da der Funktionswert (die Geschwindigkeit) im Ziel am kleinsten ist.
c) Phillip gewinnt, da er immer schneller als Lukas läuft und gegenüber Sarah nur auf den ersten 60 bis 70 m langsamer ist.

5
Fahrzeug 2 fährt mit konstanter Geschwindigkeit, da es in gleichen Zeitabschnitten (10 min) stets die gleiche Strecke (18 km) zurücklegt.

6
a)

x	f(x)
−3	6,5
−2	5
0	2
1	0,5
2	−1



b) $d = 2$ ist der Abschnitt auf der y-Achse, $k = -1{,}5$ die Steigung der Geraden.
c) Nullstelle $x = \frac{4}{3}$;
d) Die Funktion fällt in ihrem gesamten Bereich, da die Steigung $k < 0$ ist.
e) $\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{-1 - 3{,}5}{3} = -1{,}5$

7
B; C; F; A

8
1. Zeile: nein – nein – nein
2. Zeile: nein – ja – nein

9
a) ja, $P(x) = p \cdot x$
b) ja, $K(x) = G + s \cdot x$
c) ja, $u(a) = 4a$
d) nein, $O(a) = 6a^2$
e) nein, $V(a) = a^3$
f) nein, $A(b) = \frac{G}{b}$

10 a) f_5 b) f_2

11 (1) B: f(c) ist eine quadratische Funktion durch (0|0).
(2) F: Der Graph von f(d) ist symmetrisch zur y-Achse und hat die y-Achse als Asymptote.
(3) A: f(b) ist eine lineare Funktion durch (0|0).

12 E; F; A; B

13 (B), (C) und (E) sind richtig.

14 D; E; A

15 a) richtig – falsch – falsch – richtig – falsch;
b) richtig – richtig – falsch – richtig – richtig

Typ-2-Aufgaben Funktionen – Lösungen

1 a) Der CO_2-Ausstoß im Jahr 2020 würde dann 41,15 Milliarden Tonnen betragen.

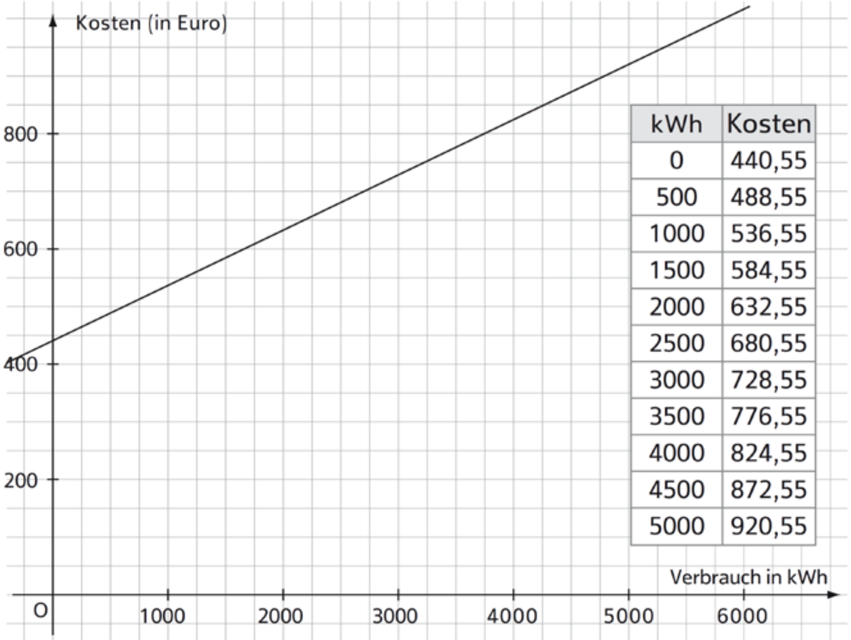
b) $A(n) = 0{,}67 \cdot n + 35{,}1$ mit $n = 0$ für das Jahr 2013; $A(27) = 53{,}19$

Würde die Entwicklung so weitergehen, müsste man für 2040 einen Wert von 53,19 Milliarden Tonnen CO_2-Ausstoß prognostizieren. Das wären um 7,69 Milliarden Tonnen mehr.

Man rechnet also damit, dass die CO_2-Emissionen gebremst werden können.

2 a) Die Fixkosten betragen 440,55 €. 20 % Umsatzsteuer in 906,24 € machen 151,04 Euro aus, von den variablen Kosten sind 77,615 € Umsatzsteuer und von den Fixkosten 73,425 €.

b) $K(x) = 0{,}096x + 440{,}55$



kWh	Kosten
0	440,55
500	488,55
1000	536,55
1500	584,55
2000	632,55
2500	680,55
3000	728,55
3500	776,55
4000	824,55
4500	872,55
5000	920,55

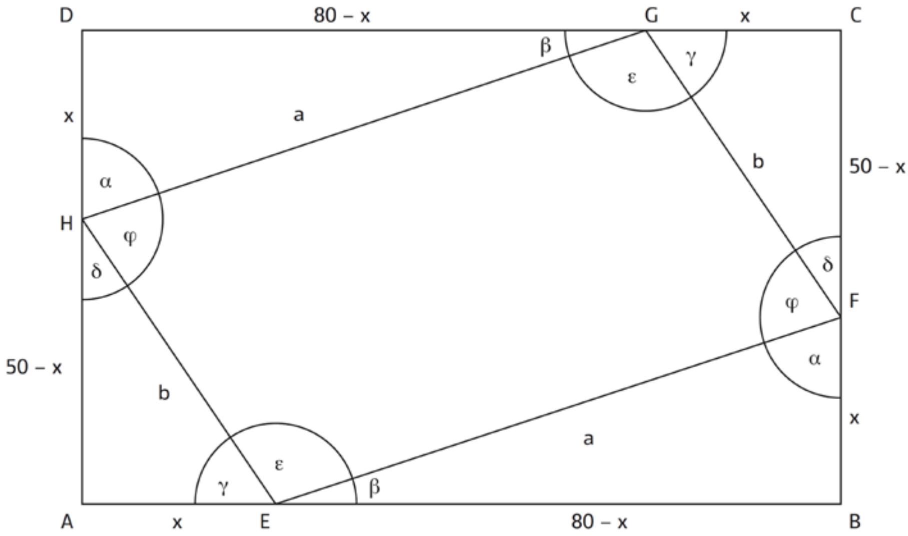
50 % Stromverbrauch bedeutet Kosten von $K(2423{,}1) = 673{,}1676$

Für 2423,1 kWh betragen die Gesamtstromkosten 673,17 €.

Die Stromrechnung sinkt um etwa 25,7 %.

3 Eigenschaften des Parallelogramms: Je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel und gleich lang, die Winkel an einer Seite ergänzen sich auf 180°, gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.

Skizze:



a) Begründung: Das Viereck hat je zwei gegenüberliegende Seiten mit der Länge

$a = \sqrt{x^2 + (80 - x)^2}$ und $b = \sqrt{x^2 + (50 - x)^2}$.

Es gilt:

$\alpha + \varphi_1 + \delta = 180° \Rightarrow \varphi_1 = 180° - \alpha - \delta$

$\alpha + \varphi_2 + \delta = 180° \Rightarrow \varphi_2 = 180° - \alpha - \delta$

$\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$

Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.

$$\begin{array}{r|l} \alpha + \varphi + \delta = 180° & \multirow{2}{*}{+} \\ \beta + \varepsilon + \gamma = 180° & \\ \hline \end{array}$$

$90° + \varphi + \varepsilon + 90° = 360° \Rightarrow \varphi + \varepsilon = 180°$

b) $D_x = (0; 50)$

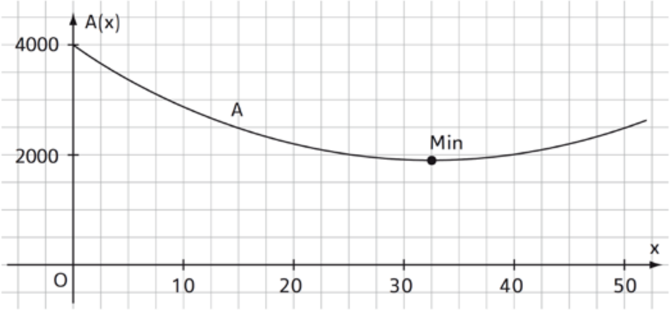
$x = 10 \Rightarrow A = 80 \cdot 50 - (10 \cdot 40) - (10 \cdot 70) = 2900 \quad A = 2900\ m^2$

$x = 20 \Rightarrow A = 80 \cdot 50 - (20 \cdot 30) - (20 \cdot 60) = 2200 \quad A = 2200\ m^2$

$x = 30 \Rightarrow A = 80 \cdot 50 - (30 \cdot 20) - (30 \cdot 50) = 1900 \quad A = 1900\ m^2$

$x = 40 \Rightarrow A = 80 \cdot 50 - (40 \cdot 10) - (40 \cdot 40) = 2000 \quad A = 2000\ m^2$

c) falsch – falsch – richtig – falsch – falsch – falsch
Für $x = 32{,}5$ m entsteht das Parallelogramm mit dem kleinsten Flächeninhalt $A = 1887{,}5$ m^2.



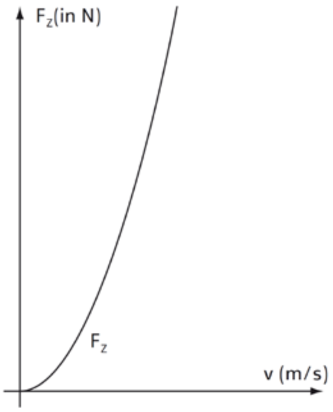
Seite	Flächeninhalt
5	3400
10	2900
15	2500
20	2200
25	2000
30	1900
35	1900
40	2000
45	2200

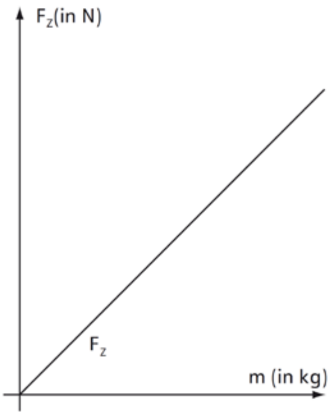
4 a)

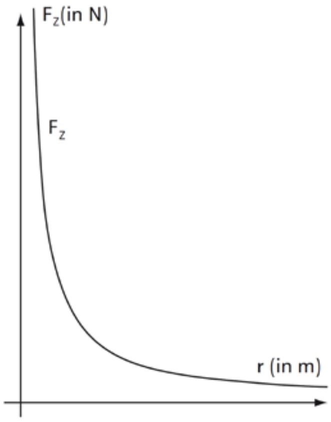
(1) $F_Z(v) = \frac{m}{r} \cdot v^2$
quadratische Funktion

(2) $F_Z(m) = \frac{v^2}{r} \cdot m$
direkt proportionale bzw. lineare Funktion

(3) $F_Z(r) = m \cdot v^2 \cdot \frac{1}{r}$
indirekt proportionale Funktion



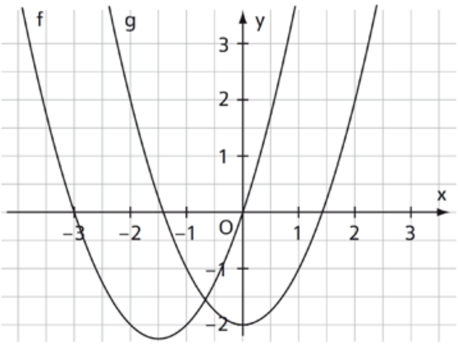




Bei konstantem m und v halbiert sich die Zentripetalkraft, wenn der Radius r verdoppelt wird, da eine indirekt proportionale Funktion vorliegt.

b) $F_Z = 0{,}46875$ N; $a = 7{,}8125$ m/s^2

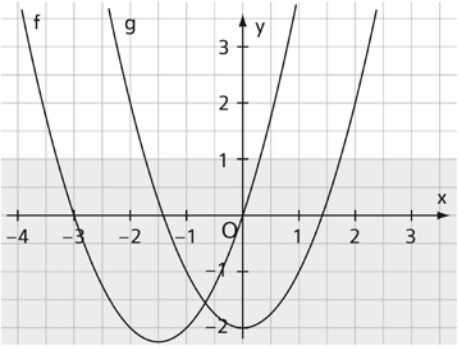
c) Wird $F(a) = m \cdot a$ als Funktion betrachtet, so liegt eine direkt proportionale Funktion vor. Für diese gilt immer $c \cdot F(a) = F(a \cdot c)$. Für die Fliehkraft bedeutet das: Wird die Beschleunigung mit dem Faktor c multipliziert, erhöht sich die Fliehkraft ebenfalls um den Faktor c.

5 a) 

$S_f(-1{,}5\,|\,-2{,}25)$ $S_g(0\,|\,2)$

b) $f(5) - g(5) = 17$; $f(6) - g(6) = 20$; $f(7) - g(7) = 23$; $f(8) - g(8) = 26$; $d(x) = 3x + 2$

c) Für $x \in\ ]-3{,}3;\ 0{,}3[$ gilt $f(x) < 1$; für $x \in\ ]-1{,}73;\ 1{,}73[$ gilt $g(x) < 1$
Gleichungen: $x^2 + 3x = 1$ und $x^2 - 2 = 1$



d) $f(x) = (x + 3) \cdot x$; der Linearfaktor $(x + 3)$ besagt, dass eine Nullstelle von f an der Stelle $x = -3$ ist; der Linearfaktor x besagt, dass eine weitere Nullstelle von f an der Stelle $x = 0$ ist

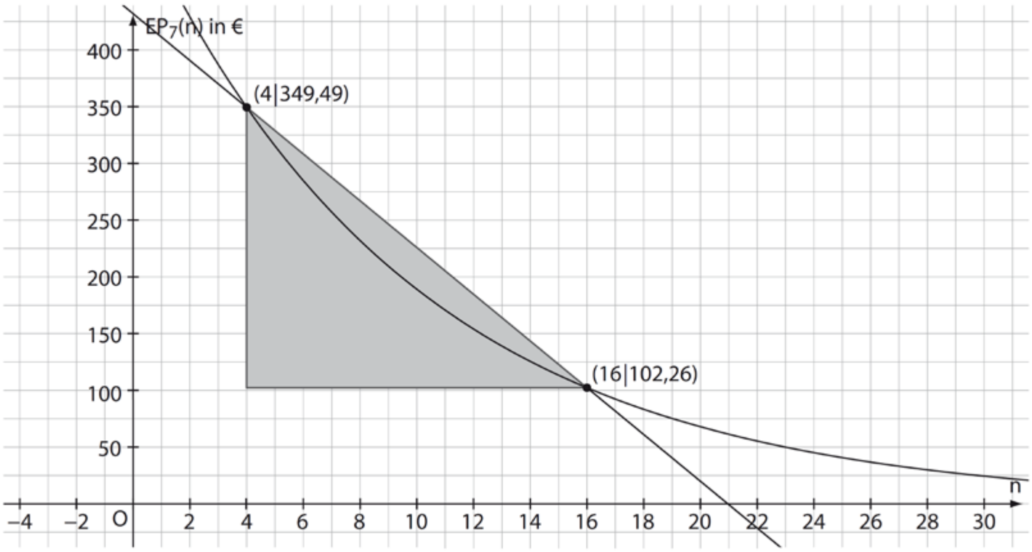
e) Die Gerade lautet $y = x$ und schließt mit der x-Achse einen Winkel von 45° ein.

Kompetenzcheck Potenz-, Wurzel- und Polynomfunktionen – Lösungen

1	$a_1 = -0{,}5;\ b_1 = 5 \quad a_2 = -0{,}25;\ b_2 = 2$ $a_3 = 4;\ b_3 = -2 \quad a_4 = -0{,}5;\ b_4 = -2$
2	$c_1 = 3;\ c_2 = -1;\ c_3 = 2;\ c_4 = 2$
3	Falsch – richtig – richtig – falsch – falsch
4	$f_1: C \quad f_2: A \quad f_3: F \quad f_4: B$
5	Falsch – falsch – richtig – falsch – richtig

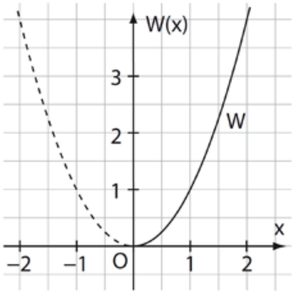
Typ-2-Aufgaben Potenz-, Wurzel- und Polynomfunktionen – Lösungen

1
a) Spalten (3) $EP_3(n)$: wenn sich die Anzahl der Teilnehmer/innen verdoppelt, halbiert sich der Einzelpreis EP.
b) $EP_6(n) = 600/n$, Funktionstypen bei EP_6 – indirekt proportionale Funktion; Typ: $f(x) = a/x$
c) Die mittlere Änderungsrate beträgt – 20,6 €.
Wenn sich Anzahl der Teilnehmer/innen von 4 auf 16 erhöht, dann nimmt der Einzelpreis durchschnittlich um 21 € ab.



Als Lösungsintervall ist [– 20; – 21] richtig.

2
a) $m = \frac{3}{8}$ kg = 0,375 kg, E_{kin} vervierfacht sich, wenn v verdoppelt wird
b) $\frac{\Delta E_{kin}}{\Delta v} = 450\left(\frac{J}{m/s}\right)$, wird die Geschwindigkeit v von 15 m/s auf 30 m/s erhöht, dann werden durchschnittlich $450\left(\frac{J}{m/s}\right)$ frei.
c) wahr – wahr – falsch – wahr – wahr



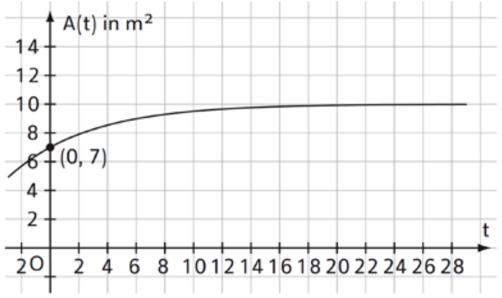
3
a) f_1 und f_2 sind Umkehrfunktionen, wobei f_2 nur in $\mathbb{R}^+$ definiert ist.
Beide Graphen gehen durch den Punkt (1 | 1), weil $1^r = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
b) f_3 geht aus f_1 hervor, wenn der Parameter c = – 1 bei einer Funktion der Form f(x) + c zu f_1 hinzugefügt wird.
f_4 geht aus f_2 hervor, wenn die Parameter a = – 1 und b = 0,5 bei einer Funktion der Form $f(x) = a\,x^{\frac{1}{2}} + b$ zu f_2 hinzugefügt werden.

Kompetenzcheck Exponentialfunktionen – Lösungen

1	Nein – ja – nein – nein – ja
2	Ja – ja – ja – ja – nein
3	❶ 2, ❷ 3
4	D – C – A – B
5	Ja – nein – nein – ja – nein
6	C – F – D – A
7	Ja – nein – nein – ja – nein

Typ-2-Aufgaben Exponentialfunktionen – Lösungen

1 a)



Zum Zeitpunkt $t = 0$ bedeckt die Wasserlinse $7\,m^2$.

b) 1. Woche 7 %; 2. Woche 5,5 %; 3. Woche 4,3 %; 4. Woche 3,5 %; 5. Woche 2,8 %; 6. Woche 2,3 %; nach etwa 5 Wochen hat sich der Anfangsbestand der Wasserlinse um 25 % erhöht.

c) Wenn bei $A(t) = 10 - 3 \cdot e^{-0{,}18t}$ der Wert 3 im Intervall [0; 10] variiert, dann wirkt sich das auf den Anfangsbestand und die Ausbreitung aus. Ist der Wert gleich 10; dann sind zu Beginn $0\,m^2$ Wasserlinsen vorhanden; ist der Wert 0, dann sind zu Beginn $10\,m^2$ Wasserlinsen vorhanden.

2 a) Lineares Modell: $f(t) = 0{,}04t + 4{,}5$

Exponentielles Modell mit Basis a: $g(t) = 4{,}5\,(1{,}00855^t)$

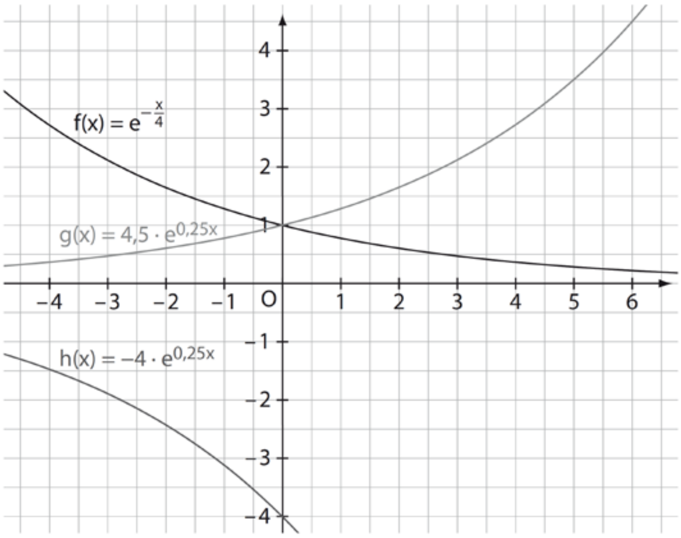
Exponentielles Modell mit Basis e: $h(t) = 4{,}5\,e^{0{,}00852 \cdot t}$

Zum Zeitpunkt $t = 5$ ist die Abweichung (der Funktionswerte) zwischen f und h mit 0,004 16 und zwischen f und g mit 0,004 31 am größten.

b) Beim linearen Modell bedeutet Erhöhung des Arguments um 1, ein Anwachsen des Durchmessers um $k = 0{,}04$ cm; bei den exponentiellen Modellen bedeutet Erhöhung des Arguments um 1 ein Anwachsen des Durchmessers um ca. 0,86 %.

c) Der Differenzenquotient im Zeitraum von 0 bis 10 Jahren beträgt bei allen drei Modellen rund 0,04; er muss gleich sein, da alle drei Funktionen denselben Tatbestand beschreiben.

3 a)

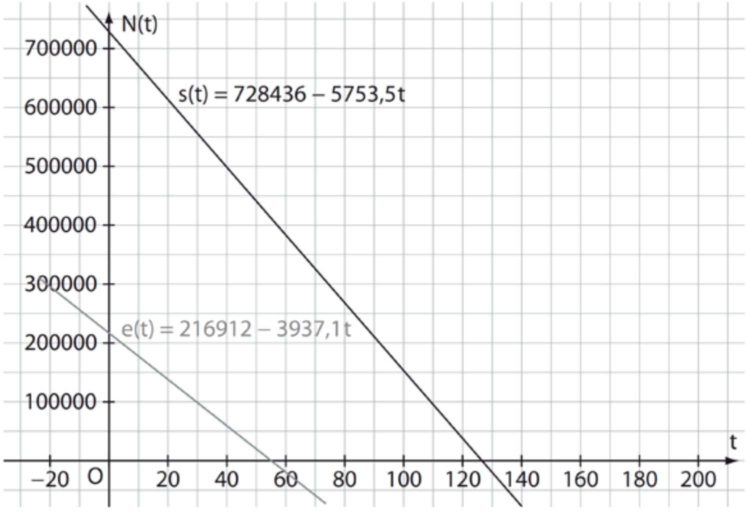


Der Graph von g geht aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der y-Achse hervor. Der Graph von h geht aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der x-Achse und anschließender Streckung mit dem Faktor 4 hervor.

b) Nur g beschreibt einen Zunahmeprozess, da die Funktion monoton wachsend ist

c) $h_1(x) = -4 \cdot e^{-0{,}25x}$; beide Graphen gehen durch den Punkt $(0 \mid -4)$; sie unterscheiden sich in der Monotonie; Asymptote ist bei beiden $y = -4$.

4 a) Steinkohle: $s(t) = 728\,436 - 5753{,}5\,t$; nach 126 Jahren verbraucht
Erdöl: $e(t) = 216\,912 - 3937{,}1\,t$; nach 55 Jahren verbraucht



b) Steinkohlereserven sind nach rund 80 Jahren und Erdölreserven nach rund 43 Jahren völlig aufgebraucht.

Kompetenzcheck Winkelfunktionen – Lösungen

1	Erste Zeile: D – A; zweite Zeile: C – E
2	Wertebereich: $[-1; 1]$; Tiefpunkt: $(\pi \mid -1)$; Nullstellen: $0{,}5\,\pi$; $1{,}5\,\pi$; monoton steigend für $\pi < x < 2\pi$; Hochpunkt $(0 \mid 1)$; monoton fallend für $0 < x < \pi$
3	(1) Amplitude: 2 m, Schwingungsdauer: $T = \pi\ \text{s} = 3{,}14\ \text{s}$; Frequenz: $\frac{1}{\pi} \approx 0{,}32\ \text{Hz}$ (2) $s(2) = 2 \cdot \sin(4) = -1{,}51\ \text{m}$ (3) Die Elongation zum Zeitpunkt $t = 20\ \text{s}$ beträgt 1,49 m.
4	F – D – A – B

Typ-2-Aufgaben Winkelfunktionen – Lösungen

1

a) U_0 gibt den Maximalwert der Spannung an (Amplitude)

b) $\frac{\pi}{2}$

c) $I(t) = I_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

2

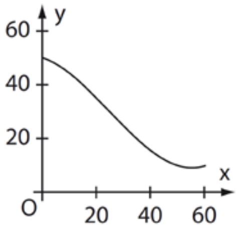
a) $A = 0{,}5$; $\omega = 2$; $\varphi_0 = 0$

b) (1) Schwingung D mit $\omega = 5$. Im Intervall $[0; 2\pi]$ führt sie 5 Schwingungen aus.
(2) Schwingungen B und C

Kompetenzcheck Reelle Funktionen – Lösungen

1

a)



b) 25,8 m

c) $x = 15$

d) $T(51{,}7\,|\,13{,}7)$

e) monoton fallend: $0 \le x < 51{,}7$; monoton steigend: $x > 51{,}7$

2

a) 0,09 €   b) −0,02 €/Monat

c) −0,015   d) 9,1 %   e) 1,056

3

Falsch – richtig – richtig – falsch – falsch

4

(1) Durch eine Funktion vom Typ $y = \frac{a}{x}$ bzw. $F(r) = \frac{a}{r}$. Sie beschreibt ein indirekt proportionales Verhältnis. (Potenzfunktion bzw. gebrochen rationale Funktion)

(2) Die neunfache Kraft.

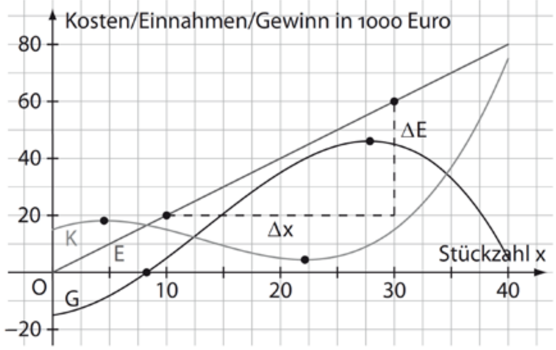
(3) $F(3v, 3r) = m \cdot \frac{(3v)^2}{3r} = m \cdot \frac{9v^2}{3r}$
$= 3 \cdot \left(m \cdot \frac{v^2}{r}\right) = 3 \cdot F(v, r)$
Die Kraft ist bei dreifacher Geschwindigkeit und dreifachem Radius dreimal so groß.

(4) Auf das $\sqrt{10}$-fache der Geschwindigkeit, d.h. auf die ca. 3,16-fache Geschwindigkeit.

Typ-2-Aufgaben Reelle Funktionen – Lösungen

1 a) $x_1 \approx 8$, $G(8) = 0$: Bei 8 Stück (x_1) macht der Betrieb keinen Gewinn.
$x_2 \approx 28$, $G(28) \approx 45$: Bei 28 Stück (x_2) ist der Gewinn maximal. Er beträgt rund 45 000 Euro.

b) $\Delta E = E(30) - E(10) = 60 - 20 = 40$
ΔE beschreibt die Veränderung der Einnahmen, wenn die Stückzahl von 10 auf 30 zunimmt. Die Einnahmen steigen um 40 000 Euro.
Differenzenquotient $\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{E(30) - E(10)}{30 - 10} = \frac{40}{20} = 2$
Der Differenzenquotient gibt an, um wie viel Euro sich die Einnahmen verändern, wenn zwischen 10 und 30 Stück die Produktion um 1 Stück steigt. Pro zusätzlich produziertem Stück steigen die Einnahmen um 2000 Euro.



c) $K(x)$ ist im Intervall [0; 5] steigend, im Intervall [5; 22] fallend und im Intervall [22; 40] steigend. Bis 5 Stück steigen die Kosten. Von 5 bis 22 Stück fallen die Kosten. Sie erreichen bei 22 Stück ihr Minimum. Ab 22 Stück steigen die Kosten wieder.

d) $G(15) \approx 21$, $E(15) = 30$, $K(15) \approx 9$: $E(15) - K(15) = 30 - 9 = 21 = G(15)$
Der Betrieb macht von 9 bis 40 Stück Gewinn.

2 a) falsch – richtig – falsch

Zeitintervall	[1; 3]	[3; 6]
absolute Änderung des Pegelstandes	−0,6	−0,9
mittlere Änderung des Pegelstandes	−0,3	−0,3
prozentuelle Änderung des Pegelstandes	−13,33 %	−23,08 %

b) falsch – falsch – richtig

Zeitintervall	[1; 3]	[3; 6]	[4; 6]
absolute Änderung des Pegelstandes	−0,45	−0,58	−0,4
mittlere Änderung des Pegelstandes	−0,23	−0,19	−0,19
prozentuelle Änderung des Pegelstandes	−12 %	−18 %	−12 %

c) Beide Funktionen sind im Intervall [0; 10] fallend. h_1 ist eine lineare Funktion mit $k < 0$ und fällt daher. h_2 ist eine Exponentialfunktion mit $0 < a < 1$ und fällt daher.

d) Keine Nullstelle im Intervall [0; 10] für beide Funktionen.
Da h_1 eine lineare Funktion ist und die Gleichung $4{,}80 - 0{,}30\,t = 0$ genau eine Lösung hat, existiert eine Nullstelle für $G = \mathbb{R}$.
Da h_2 eine Exponentialfunktion ist und die Gleichung $4{,}0 \cdot 0{,}9375^t = 0$ keine Lösung hat, existiert auch für $G = \mathbb{R}$ keine Nullstelle. Die waagrechte Achse t ist Asymptote.