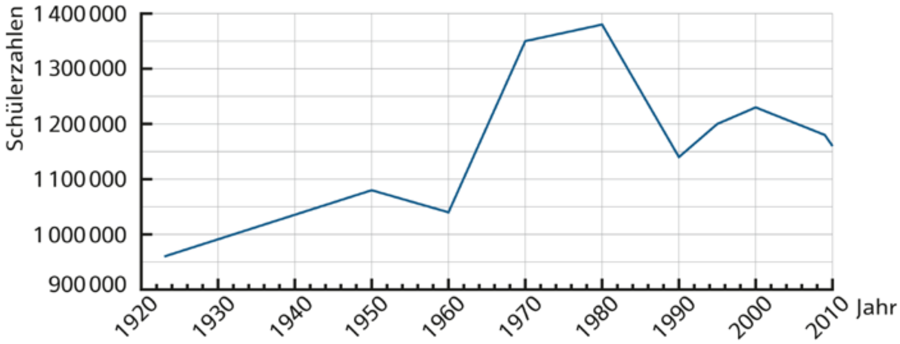
# Funktionale Abhängigkeiten

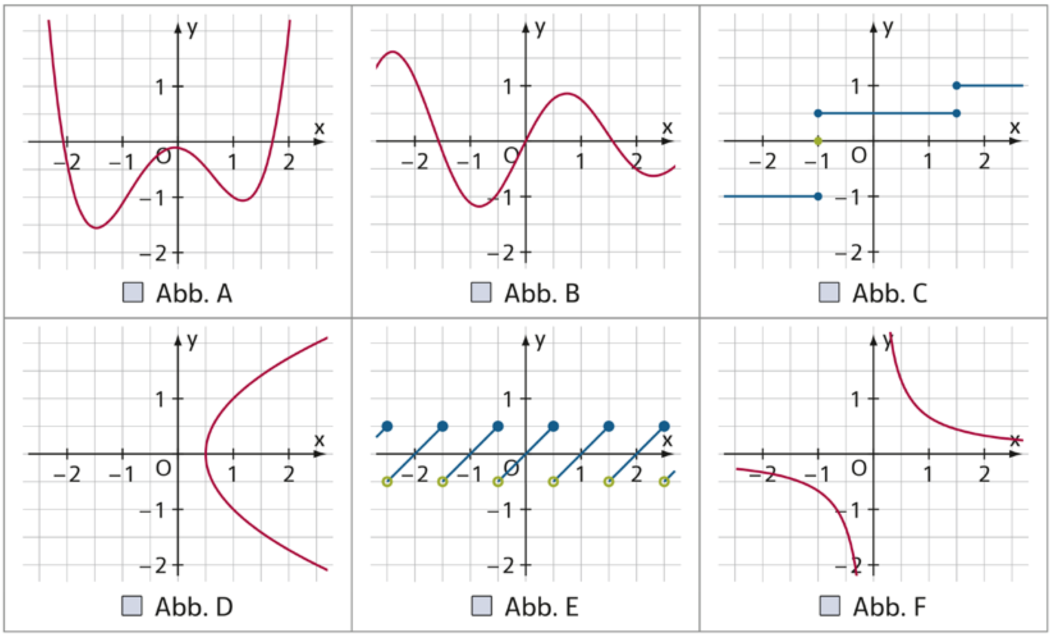
## Kompetenzcheck Funktionen

**1** Die Grafik zeigt die Anzahl der Schülerinnen und Schüler an öffentlichen und privaten Schulen in Österreich in den Jahren 1923/24 bis 2010/11.




a) Wie viele Schüler/innen besuchten in den Jahren 1964 und 1985 die Schulen?
b) In welchem Schuljahr gab es die größte Anzahl von Schülerinnen und Schülern?
c) In welchen Schuljahren besuchten 1,32 Millionen Jugendliche die Schulen?
d) Gib drei Jahrzehnte an, in denen die Schülerzahlen ständig gestiegen sind.

**2** Eine reelle Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ kann in einem Koordinatensystem als Graph dargestellt werden. Kreuze die Abbildungen an, die den Graphen einer möglichen Funktion f zeigen.




**3** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{x}$. Vervollständige die folgenden Sätze:

Die größtmögliche Definitionsmenge der Funktion f ist $D =$ ______________________.

Die Zielmenge von f ist $Z =$ ______________________.

Der Funktionswert an der Stelle 10 beträgt ______________________.

Zeige, dass $f(2) = 0$ und $f(-2) = 0$ gilt: ______________________.

Eine Stelle s, an der $f(s) = 0$ gilt, heißt ______________________.

**4** Bei einem 400-m-Lauf treten Lukas, Phillip und Sarah gegeneinander an.


Beantworte die Fragen und begründe anhand der Diagramme.

a) Wer ist 50 m nach dem Start Erster?

b) Wer ist beim Überqueren der Ziellinie am schnellsten, wer am langsamsten?

c) Wer gewinnt den 400-m-Lauf?

**5** Drei Fahrzeuge fahren zur selben Zeit von einer Raststation an einer Autobahn los. Der Weg, den die Autos zurücklegen, wird in einer Tabelle angegeben. Welche(s) der Fahrzeuge fährt mit konstanter Geschwindigkeit? Begründe deine Entscheidung.

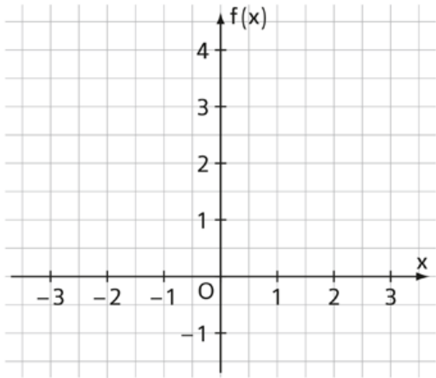
| Fahrzeug 1 | |
|---|---|
| Zeit t (min) | Weg s (km) |
| 15 | 20 |
| 30 | 45 |
| 45 | 75 |
| 60 | 90 |

| Fahrzeug 2 | |
|---|---|
| Zeit t (min) | Weg s (km) |
| 10 | 18 |
| 20 | 36 |
| 30 | 54 |
| 40 | 72 |

| Fahrzeug 3 | |
|---|---|
| Zeit t (min) | Weg s (km) |
| 5 | 10 |
| 10 | 20 |
| 15 | 30 |
| 25 | 40 |

**6** a) Zeichne den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -1{,}5x + 2$ ein. Ergänze die Tabelle.

| x | f(x) |
|---|---|
| −3 | |
| −2 | |
| 0 | |
| 1 | |
| | −1 |



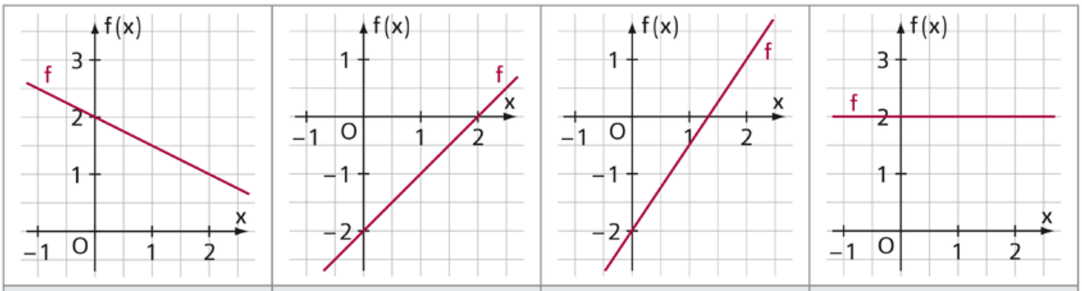

b) Welche geometrische Bedeutung haben die Parameter der Funktion f? Zeichne die beiden Werte entsprechend ihrer Bedeutung in die Grafik ein.

c) Berechne die Nullstelle der Funktion und zeichne sie ein.

d) Triff eine Aussage zu den Wachstumseigenschaften der Funktion und begründe sie.

e) Berechne den Differenzenquotienten im Intervall $[x_1; x_2]$ für $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$.

**7** Ordne jedem Graphen einer linearen Funktion den entsprechenden Ausdruck zu.




| A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$ und $d = 2$ | $d = 2$ und $f(x + h) = f(x) - 0{,}5 \cdot h$ | $f(0) = -2$ und $f(2) = 0$ | $d = -2$ und $f(x + 1) = f(x) + 0{,}5$ | $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3}{2}$ und $d = 2$ | $f(0) = -2$ und $k = \frac{3}{2}$ |

**8** Gegeben ist eine lineare Funktion f mit $f(x) = kx + d$. Wie müssen die Parameter k und d gewählt werden, damit der Graph durch den 1., 3. und 4. Quadranten verläuft?

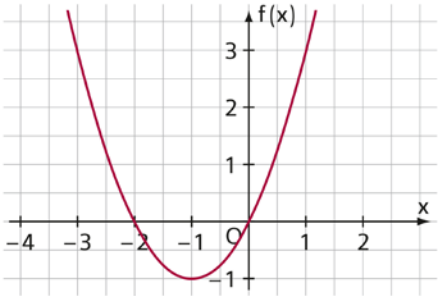
| | | |
|---|---|---|
| ☐ $k > 0$ und $d = 0$ | ☐ $k = 0$ und $d > 0$ | ☐ $k = 0$ und $d < 0$ |
| ☐ $k < 0$ und $d = 0$ | ☐ $k > 0$ und $d < 0$ | ☐ $k < 0$ und $d > 0$ |

**9** Ist der angegebene Zusammenhang durch eine lineare Gleichung beschreibbar?
Wenn ja, gib einen geeigneten Funktionsterm an. Wenn nein, gib eine Begründung an.

a) Der Preis P von x Rosen bei einem Einzelpreis von p €
b) Die Stromkosten K für x kWh bei einer Grundgebühr von G € und s € je kWh
c) Der Umfang u eines Quadrates mit der Seitenlänge a
d) Die Oberfläche O eines Würfels mit der Seitenlänge a
e) Das Volumen V eines Würfels mit der Seitenlänge a
f) Die Anzahl A der getankten Liter Benzin in Abhängigkeit von b, wenn man fixe G € zur Verfügung hat und 1 Liter Benzin b € kostet

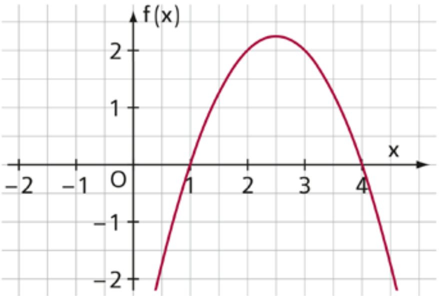
**10** Durch welchen Funktionsterm wird der Graph richtig angegeben?
Kreuze den richtigen Funktionsterm an.

a)




- ☐ $f_1(x) = x^2 - 3x + 1$
- ☐ $f_2(x) = 2x^2 - 3x + 1$
- ☐ $f_3(x) = x^2 - 1$
- ☐ $f_4(x) = -x^2 - 2x$
- ☐ $f_5(x) = x^2 + 2x$

b)



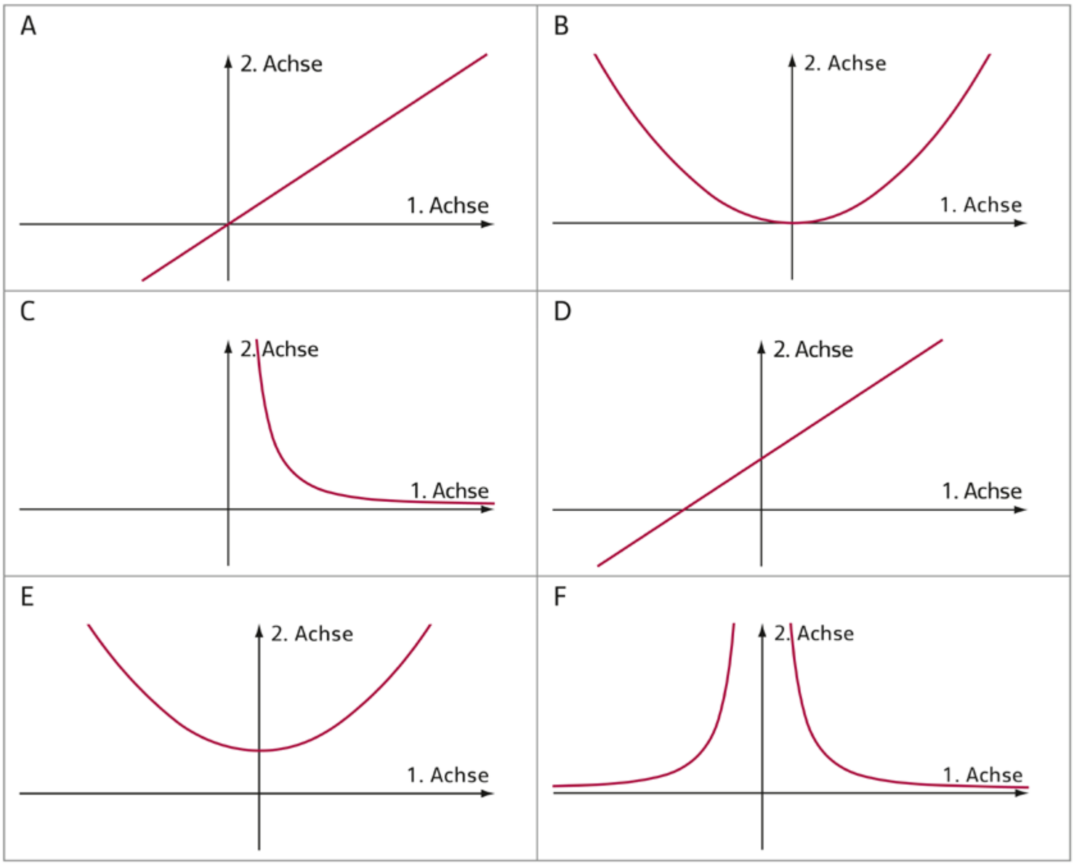

- ☐ $f_1(x) = 3x^2 - 2x + 1$
- ☐ $f_2(x) = -x^2 + 5x - 4$
- ☐ $f_3(x) = x^2 - 3x + 1$
- ☐ $f_4(x) = -x^2 - 4x$
- ☐ $f_5(x) = x^2 + x - 2$

**11** Gegeben ist die Formel $a = \frac{b \cdot c^2}{2d^2}$.

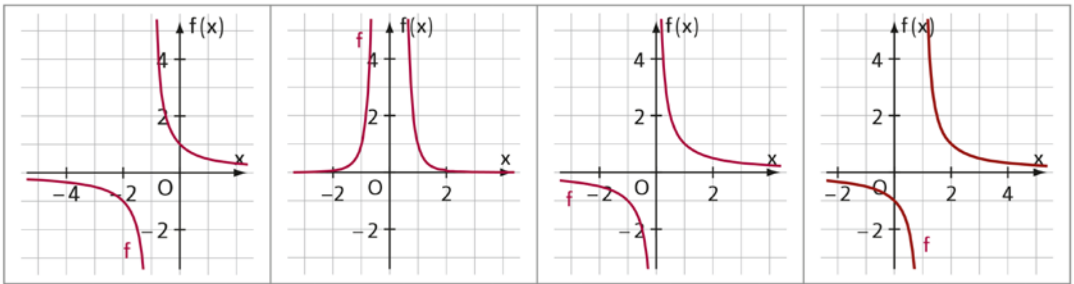
(1) b und d sind konstant, b, $d > 0$, $a = f(c)$: Welcher der dargestellten Funktionsgraphen stellt die Funktion f(c) dar? Begründe deine Entscheidung.

(2) b und c sind konstant, b, $c > 0$, $d \neq 0$, $a = f(d)$: Welcher der dargestellten Funktionsgraphen stellt die Funktion f(d) dar? Begründe deine Entscheidung.

(3) c und d sind konstant, c, $d > 0$, $a = f(b)$: Welcher der dargestellten Funktionsgraphen stellt die Funktion f(b) dar? Begründe deine Entscheidung.




**12** Ordne den abgebildeten Funktionsgraphen die passende Funktionsgleichung zu.




| A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = \frac{1}{x}$ | $f(x) = \frac{1}{x-1}$ | $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ | $f(x) = \frac{1}{x-2}$ | $f(x) = \frac{1}{x+1}$ | $f(x) = \frac{1}{x^4}$ |

**13** Kreuze die zutreffenden Aussagen über die Nullstellen einer quadratischen Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b$ $(a \neq 0;\ a, b \in \mathbb{R})$ an.

- ☐ (A) Ist $a > 0$ und $b > 0$, dann hat die Funktion f genau zwei verschiedene reelle Nullstellen.
- ☐ (B) Ist $a < 0$ und $b > 0$, dann hat die Funktion f genau zwei verschiedene reelle Nullstellen.
- ☐ (C) Ist $b = 0$, dann hat die Funktion f genau eine reelle Nullstelle.
- ☐ (D) Ist $a < 0$ und $b < 0$, dann hat die Funktion f genau zwei verschiedene reelle Nullstellen.
- ☐ (E) Ist $a > 0$ und $b < 0$, dann hat die Funktion f genau zwei verschiedene reelle Nullstellen.

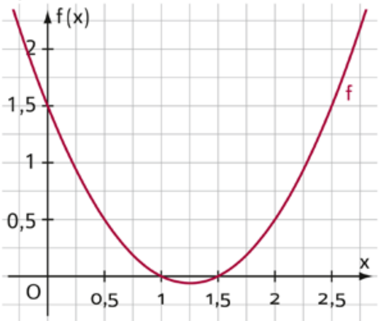
**14** Das Volumen eines Zylinders wird mit der Formel $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$ berechnet.
Welche Funktion passt zu den gegebenen Eigenschaften? Ordne richtig zu.

| | |
|---|---|
| Die Funktion ist quadratisch und h konstant. | |
| Die Funktion ist linear. Die Höhe des Zylinders ist unabhängige Variable. | |
| V ist konstant und r die unabhängige Variable. | |

| | |
|---|---|
| A | $h(r) = \frac{V}{r^2 \cdot \pi}$ |
| B | $h(V) = \frac{V}{r^2 \pi}$ |
| C | $r(V) = \sqrt{\frac{V}{h \cdot \pi}}$ |
| D | $V(r) = r^2 \cdot \pi \cdot h$ |
| E | $V(h) = r^2 \cdot \pi \cdot h$ |

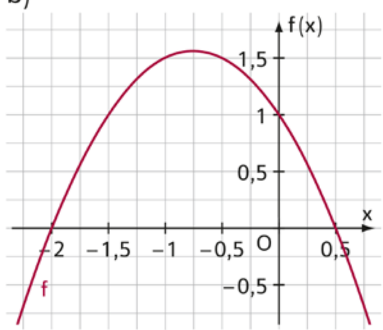
**15** Die Abbildung zeigt den Graphen einer quadratischen Funktion. Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an.

a)




- ☐ An der Stelle $x = 1{,}25$ hat f ein Minimum.
- ☐ $f(x) = (x + 1) \cdot (x + 1{,}5)$
- ☐ Für $1 < x < 1{,}5$ gilt: $f(x) > 0$.
- ☐ $f(x) = (x - 1) \cdot (x - 1{,}5)$
- ☐ Für $x < 0{,}5$ und $x > 2$ gilt: $f(x) \geq 2$.

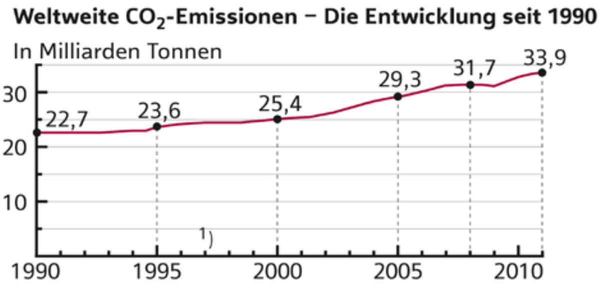
b)




- ☐ $f(x) \geq 1$ für $x \in [-1{,}5; 0]$
- ☐ $f(0) = 1$
- ☐ $f(x) = -(x + 0{,}5) \cdot (x - 2)$
- ☐ $f(x) = -(x + 2) \cdot (x - 0{,}5)$
- ☐ $f(-0{,}25) = f(-1{,}25)$

## Typ-2-Aufgaben Funktionen

**1** Die Grafik zeigt die Entwicklung des weltweiten $CO_2$-Ausstoßes von 1990 bis 2011.




[1]) Klimagipfel Kyoto 1997: Industriestaaten vereinbaren, den Ausstoß von Treibhausgasen zu reduzieren.

a) Die Entwicklung des $CO_2$-Ausstoßes zwischen 2000 und 2008 lässt sich näherungsweise mit einer linearen Funktion A beschreiben. Nimm an, dass sich der $CO_2$-Ausstoß auch nach 2008 gemäß der linearen Funktion A entwickelt hätte. Wie groß wäre dann der $CO_2$-Ausstoß im Jahr 2020?

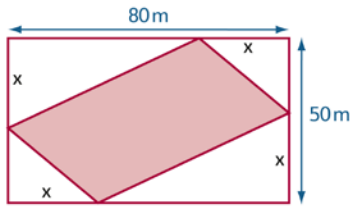
b) 2013 wurden mit 35,1 Milliarden Tonnen weltweit rund 670 Millionen Tonnen mehr $CO_2$ ausgestoßen als im Jahr davor. Für das Jahr 2040 werden 45,5 Milliarden Tonnen Kohlendioxid-Emissionen prognostiziert. Gib für die Entwicklung des $CO_2$-Ausstoßes von 2012 bis 2013 eine lineare Funktion an und prognostiziere unter der Voraussetzung, dass dieser Entwicklungstrend anhält, einen Wert für 2040. Vergleiche diesen Wert mit der oben angeführten Prognose.
Quelle: http://orf.at/stories/2153083/2153099/. Veröffentlicht am 27.11.2012.

**2** Die Stromrechnung (inkl. 20 % Umsatzsteuer) einer vierköpfigen Familie für ein Jahr (365 Tage) beträgt 906,24 €. Davon sind 465,69 € variable Kosten (hängen vom Stromverbrauch der Familie ab), der Rest sind Fixkosten (Entgeld für Systemnutzung und Messleistung, Abgaben, Zuschläge und Förderbeiträge).

a) Wie hoch sind die Fixkosten? Berechne die Höhe der Umsatzsteuer, die jeweils in den variablen Kosten, den Fixkosten und der gesamten Stromrechnung enthalten ist.

b) Die Familie hat in diesem Jahr 4846,2 kWh Strom verbraucht. Gib eine Termdarstellung der Funktion K an, die dem Verbrauch x (in kWh) die Gesamtstromkosten K (x) (in Euro, inkl. 20 % Umsatzsteuer) zuordnet.
Erstelle eine Wertetabelle im Bereich [0 kWh; 5000 kWh] mit Schrittweite 500. Zeichne den Graphen der Funktion. Um wie viel Prozent wird die Stromrechnung dieser Familie (inkl. 20 % Umsatzsteuer) gesenkt, wenn der Stromverbrauch um 50 % verringert wird?

**3** Einem Rechteck mit den Seitenlängen 50 m und 80 m wird ein Viereck wie abgebildet eingeschrieben.




a) Begründe, warum das Viereck ein Parallelogramm sein muss.

b) Gib einen Definitionsbereich für die eingezeichnete Länge x an und berechne die Flächeninhalte der Parallelogramme, wenn $x = 10$ m; 20 m; 30 m bzw. 40 m ist.

c) Welche der folgenden Funktionsgleichungen beschreibt die Funktion für den Flächeninhalt des Parallelogramms in Abhängigkeit von der Länge x? Kreuze an.
- ☐ $A(x) = 4000 - x \cdot (50 + x) - x \cdot (80 - x)$
- ☐ $A(x) = 4000 - x \cdot (50 - x) + x \cdot (80 - x)$
- ☐ $A(x) = 4000 - x \cdot (50 - x) - x \cdot (80 - x)$
- ☐ $A(x) = 4000 + x \cdot (50 - x) + x \cdot (80 - x)$
- ☐ $A(x) = 4000 - x \cdot (x - 50) - x \cdot (x - 60)$
- ☐ $A(x) = 4000 + x \cdot (50 - x) - x \cdot (80 - x)$

Zeichne anschließend den Graphen der Funktion und lies aus der Grafik ab, für welches x der Flächeninhalt des Parallelogramms am kleinsten ist.

**4** Die Fliehkraft ist eine Trägheitskraft, die eine Person wahrnimmt, wenn sie beispielsweise auf einem Karussell sitzt und sich dieses dreht. Wird eine Person oder ein Gegenstand mit konstanter Geschwindigkeit kreisförmig um einen Mittelpunkt gedreht, so wirkt die zum Kreismittelpunkt gerichtete Zentripetalkraft. Für sie gilt: $F_Z = m \cdot \frac{v^2}{r}$ (F in Newton, Masse m in kg, Geschwindigkeit v in m/s, Radius r in m). Für die Fliehkraft gilt die folgende Formel: $F = m \cdot a$ (F in Newton, m in kg, Beschleunigung a in $m/s^2$).

a) Gib an, welche Funktionstypen und Graphen entstehen, wenn in $F_Z$
   (1) m und r konstant sind,
   (2) v und r konstant sind,
   (3) m und v konstant sind.
   Gib an, wie sich die Zentripetalkraft bei konstantem m und v verändert, wenn der Radius r verdoppelt wird, und begründe.

b) Ein Tennisball mit einem Gewicht von 60 g wird an einer 1 Meter langen Schnur befestigt, wovon etwa 20 cm zum Halten der Schnur benötigt werden.
   Wie groß ist die Kraft, die auf eine Person wirkt, die diesen Tennisball kreisförmig um sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 2,5 m/s dreht? Wie groß ist die Beschleunigung des Tennisballs bei dieser Drehung?

c) Begründe, warum für die Fliehkraft $c \cdot F(a) = F(a \cdot c)$ für $c > 0$ gilt, und erkläre diesen Sachverhalt im Kontext.

**5** Gegeben sind die beiden Funktionen f und g mit $f(x) = x^2 + 3x$ und $g(x) = x^2 - 2$.

a) Zeichne die Graphen der Funktionen f und g in ein Koordinatensystem und bestimme deren Scheitelpunkte.

b) Ermittle die Differenz der Funktionswerte $f(x)$ und $g(x)$ für $x = 5, 6, 7$ und 8. Gib eine Funktion $d(x)$ an, welche die Differenz der Funktionswerte $f(x)$ und $g(x)$ beschreibt.

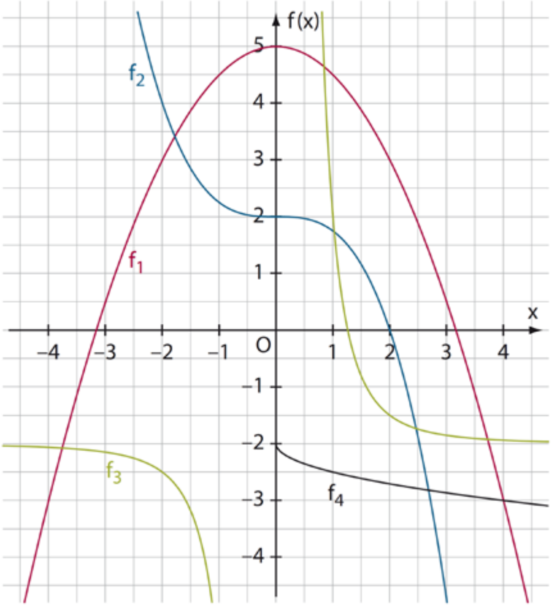
c) Ermittle grafisch, für welche x die Funktionswerte von f und g kleiner als 1 sind. Gib jene Gleichungen an, mit denen rechnerisch der Bereich ermittelt werden kann, für den gilt, dass die Funktionswerte von f und g kleiner als 1 sind.

d) Gib die Funktionsgleichung von f mithilfe von Linearfaktoren an und erkläre, welcher Zusammenhang zwischen den Nullstellen von f und den Linearfaktoren besteht.

e) Welchen Winkel schließt eine Gerade durch die Punkte $P(0|f(0))$ und $R(2|g(2))$ mit der x-Achse ein?

## Kompetenzcheck Potenz-, Wurzel- und Polynomfunktionen

**1** Von den Funktionen $f_1$ bis $f_4$ sind die Graphen gegeben. Ermittle jeweils die Parameter a und b.




$f_1(x) = a_1 \cdot x^2 + b_1$

$a_1 =$ ____________________

$b_1 =$ ____________________

$f_2(x) = a_2 \cdot x^3 + b_2$

$a_2 =$ ____________________

$b_2 =$ ____________________

$f_3(x) = a_3 \cdot x^{-3} + b_3$

$a_3 =$ ____________________

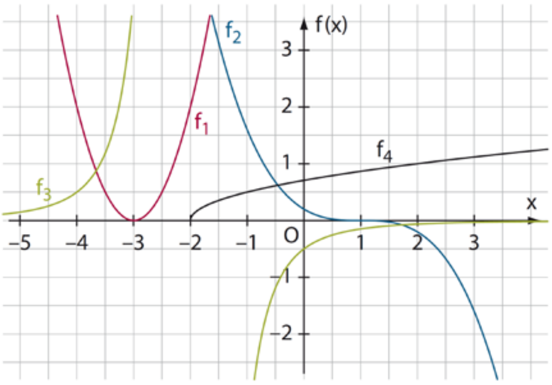
$b_3 =$ ____________________

$f_4(x) = a_4 \cdot \sqrt{x} + b_4$

$a_4 =$ ____________________

$b_4 =$ ____________________

**2** Von den Funktionen $f_1$ bis $f_4$ sind die Graphen gegeben. Ermittle jeweils den Parameter c.




$f_1(x) = 2 \cdot (x + c_1)^2$

$c_1 =$ ____________________

$f_2(x) = -0{,}2 \cdot (x + c_2)^3$

$c_2 =$ ____________________

$f_3(x) = -4 \cdot (x + c_3)^{-3}$

$c_3 =$ ____________________

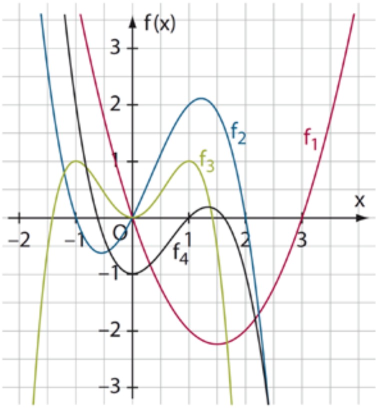
$f_4(x) = 0{,}5 \cdot \sqrt{x + c_4}$

$c_4 =$ ____________________

**3** Für die Herstellung eines Produkts wird die Kostenfunktion K (x) angegeben.
Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an.

| | |
|---|---|
| Die mittlere Änderungsrate im Intervall [a; b] hat den Wert c < 0. Das bedeutet, dass die Produktionskosten in diesem Intervall steigen. | ☐ |
| Die mittlere Änderungsrate im Intervall [a; b] hat den Wert c < 0. Das bedeutet, dass die Produktionskosten in diesem Intervall fallen. | ☐ |
| Die absolute Änderung im Intervall [a; b] hat den Wert c < 0. Das bedeutet, dass die Produktionskosten von a Mengeneinheiten um c Geldeinheiten höher sind, als die Produktionskosten von b Mengeneinheiten. | ☐ |
| Die absolute Änderung im Intervall [a; b] hat den Wert c < 0. Das bedeutet, dass die Produktionskosten von a Mengeneinheiten um c Geldeinheiten niedriger sind, als die Produktionskosten von b Mengeneinheiten. | ☐ |
| Dividiert man die absolute Änderung im Intervall [a; b] durch K (b), so erhält man die mittlere Änderungsrate im Intervall [a, b]. | ☐ |

**4** Es sind die Graphen der Polynomfunktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Ordne den Graphen jeweils die entsprechende Funktionsgleichung zu.




$f_1$: ☐

$f_2$: ☐

$f_3$: ☐

$f_4$: ☐

| | |
|---|---|
| A | $f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$ |
| B | $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 1$ |
| C | $f(x) = x^2 - 3x$ |
| D | $f(x) = x^4 - 5x^3$ |
| E | $f(x) = x^2 + x + 2$ |
| F | $f(x) = -x^4 + 2x^2$ |

**5** Ein Sachverhalt kann mithilfe der Potenzfunktion $f(x) = a \cdot x^{-1}$ beschrieben werden. Kreuze die zutreffende(n) Beschreibunge(n) an.

| | |
|---|---|
| Volumen in Abhängigkeit von der Grundfläche eines Prismas mit fester Höhe | ☐ |
| Zylinderhöhe in Abhängigkeit vom Basiskreisradius eines Zylinders mit festem Volumen | ☐ |
| Die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit, die für eine feste Strecke benötigt wird | ☐ |
| Der Flächeninhalt eines Deltoids in Abhängigkeit von der kürzeren Diagonale, wenn die längere Diagonale eine feste Größe hat | ☐ |
| Preis pro Person in Abhängigkeit von der Anzahl der teilnehmenden Personen, die für ein gemeinsames Event einen festen Pauschalpreis bezahlen | ☐ |

## Typ-2-Aufgaben Potenz-, Wurzel- und Polynomfunktionen

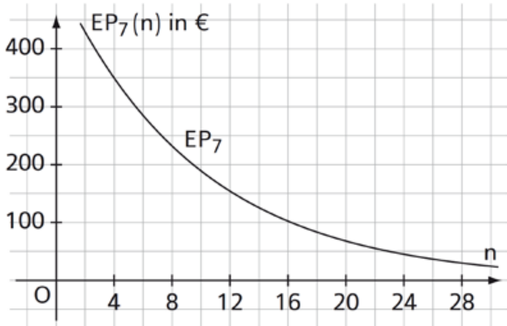
**1** Ein Jugendverein plant einen eintägigen Ausflug mit einem Autobus. Von einem Reiseunternehmen holen die Organisatoren ein Angebot mit einem fixen Gesamtpreis GP ein. Je mehr Mitglieder des Vereins an diesem Ausflug teilnehmen, desto geringer wird der Einzelpreis EP für jeden Jugendlichen. Der Gesamtpreis wird gleichmäßig auf alle Jugendlichen aufgeteilt.

a) Welche der Spalten (1) bis (5) beschreibt den Zusammenhang zwischen der Anzahl n der Teilnehmer/innen (Spalte – Anzahl n) und dem Einzelpreis EP richtig?

| Anzahl n | (1) $EP_1$ (n) | (2) $EP_2$(n) | (3) $EP_3$(n) | (4) $EP_4$(n) | (5) $EP_5$(n) |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 650 | 775 | 160 | 700 | 725 |
| 10 | 500 | 700 | 80 | 600 | 650 |
| 15 | 350 | 575 | 53,33 | 500 | 575 |
| 20 | 200 | 400 | 40 | 400 | 500 |
| 25 | 50 | 175 | 32 | 300 | 425 |

Gib an, wie sich der Einzelpreis EP ändert, wenn sich die Anzahl der Teilnehmer/innen verdoppelt.

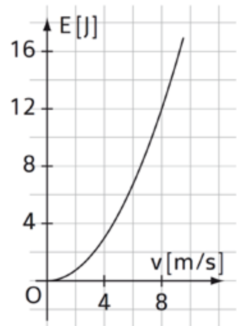
b) Gib für einen Gesamtpreis GP von € 600,– eine Funktion $EP_6$ an, die die Abhängigkeit des Einzelpreises EP von der Anzahl n der Teilnehmer/innen beschreibt. Gib an, welcher Funktionstyp bei $EP_6$ vorliegt.




c) Der nebenstehende Graph einer Funktion $EP_7$ beschreibt für ein Angebot eines anderen Reiseunternehmens ebenfalls den Zusammenhang zwischen der Anzahl n der Teilnehmer/innen und dem Einzelpreis EP.

Bestimme grafisch den Wert der mittleren Änderungsrate im Intervall [4; 16] und interpretiere diesen Wert im Zusammenhang mit dem Angebot des Reiseunternehmens.

**2** Die kinetische Energie (Bewegungsenergie) $E_{kin}$ eines Körpers mit der Masse m und der Geschwindigkeit v wird mit $E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$ berechnet. Die Masse m wird in kg angegeben und kann als konstant angenommen werden. Die kinetische Energie (gemessen in J) hängt somit von der Geschwindigkeit v ab, die in m/s angegeben wird.




a) Bestimme mithilfe des Graphens von $E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$ den Wert für die Masse m und gib an, auf das Wievielfache $E_{kin}$ steigt, wenn die Geschwindigkeit v verdoppelt wird.

b) Berechne die durchschnittliche Änderungsrate der kinetischen Energie, wenn die Geschwindigkeit eines Körpers mit der Masse von 20 kg von 15 m/s auf 30 m/s gesteigert wird, und deute das Ergebnis im Zusammenhang mit der Bewegungsenergie.

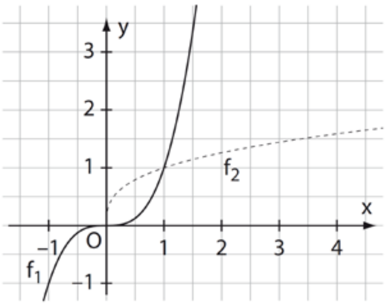
c) Welche der angegebenen physikalischen Formeln entsprechen einer Potenzfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^z$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $z \in \mathbb{Z}$? Kreuze an und skizziere den typischen Verlauf einer Potenzfunktion f, die im Intervall $[0; \infty)$ streng monoton steigend ist.

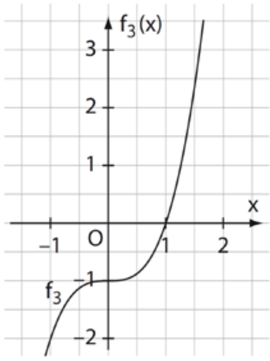
| | |
|---|---|
| Leistung $P(t) = \frac{W}{t}$ | ☐ |
| Gravitationskraft $F(r) = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$ | ☐ |
| Weg $s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$ | ☐ |
| Arbeit zum Spannen einer Feder $W(x) = \frac{k \cdot x^2}{2}$ | ☐ |
| Gravitationskraft $F(m) = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$ | ☐ |

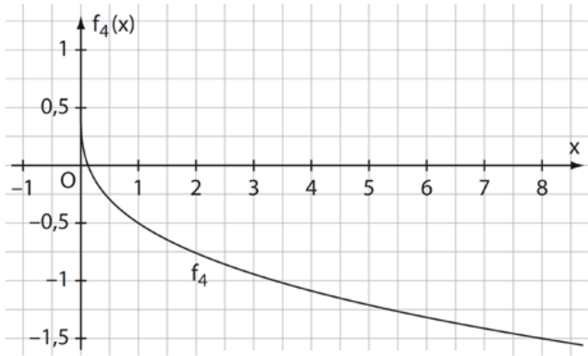
3 Die Abbildung zeigt die Graphen von zwei Funktionen $f_1$ und $f_2$ mit $f_1(x) = x^3$ und $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$.

a) Erkläre, wie der Graph der Funktion $f_1$ aus dem Graphen der Funktion $f_2$ hervorgeht und warum beide den Punkt $(1 \mid 1)$ enthalten.

b) Durch welche Parametervariationen geht die Funktion $f_3$ aus $f_1$ bzw. die Funktion $f_4$ aus der Funktion $f_2$ hervor? Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an.




| | | | |
|---|---|---|---|
| $f_3(x) = 2 \cdot f_1(x)$ | ☐ | $f_4(x) = -1 \cdot f_2(x)$ | ☐ |
| $f_3(x) = f_1(x + 3)$ | ☐ | $f_4(x) = -1 \cdot f_2(x) + 0{,}25$ | ☐ |
| $f_3(x) = f_1(x) - 1$ | ☐ | $f_4(x) = f_2(x) + (-1)$ | ☐ |

## Kompetenzcheck Exponentialfunktionen

**1** Für welche Wahl der Parameter c und a einer Funktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ mit $c \in \mathbb{R}^*$ und $a \in \mathbb{R}^+$ ist f monoton steigend? Kreuze die beiden richtigen Aussagen an.

| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
|---|---|---|---|---|
| $c > 0, 0 < a < 1$ | $c < 0, 0 < a < 1$ | $c < 0, a > 1$ | $c > 0, a < 0$ | $c > 0, a > 1$ |

**2** Welche der gegebenen Exponentialfunktionen gehen durch den 3. und 4. Quadranten?

| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
|---|---|---|---|---|
| $N(t) = -12 \cdot e^{-2t}$ | $N(t) = -12 \cdot 2^t$ | $N(t) = -12 \cdot 2^{0,5t}$ | $N(t) = -12 \cdot e^{3t}$ | $N(t) = 12 \cdot 2^t$ |

**3** Vervollständige den Satz, sodass er mathematisch korrekt ist.
Der Wachstumsfaktor einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = 0{,}7 \cdot 0{,}9^x$ beträgt ______❶______, das bedeutet, dass ______❷______.

| ❶ | |
|---|---|
| 0,7 | ☐ |
| 0,9 | ☐ |
| $0{,}9^x$ | ☐ |

| | ❷ |
|---|---|
| ☐ | $f(x+1) = f(x) \cdot 0{,}7$ ist |
| ☐ | bei Erhöhung des Arguments um 1 der Funktionswert um 90 % sinkt |
| ☐ | bei Erhöhung des Arguments um 1 der Funktionswert um 10 % sinkt |

**4** Gegeben sind die Funktionen $f_1$ bis $f_4$. Welche der Funktionen $g_1$ bis $g_6$ liegen symmetrisch zu einer der vier Funktionen $f_1$ bis $f_4$ bezüglich der y-Achse? Ordne zu.

| $f_1(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$ | $f_2(x) = -3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$ | $f_3(x) = -3 \cdot e^{-2x}$ | $f_4(x) = 3 \cdot e^{2x}$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

| A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| $g_1(x) = -3 \cdot e^{2x}$ | $g_2(x) = 3 \cdot e^{-2x}$ | $g_3(x) = -3 \cdot 1{,}5^x$ | $g_4(x) = 3 \cdot 4^x$ | $g_5(x) = -3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$ | $g_6(x) = -3 \cdot e^{0{,}5x}$ |

**5** Für welche der gegebenen Funktionen ist der Wachstumsfaktor gleich $\frac{1}{e}$? Kreuze an.

| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
|---|---|---|---|---|
| $A(n) = -1500 \cdot e^{-n}$ | $A(n) = -1500 \cdot e^{n}$ | $A(n) = -1500 \cdot e^{-0{,}5n}$ | $A(n) = 1500 \cdot e^{-n}$ | $A(n) = 1500 \cdot e^{-2n}$ |

**6** Ordne den angegebenen Funktionsgleichungen die jeweils beschriebenen Vorgänge zu.
Die Ausdehnung eines 2 m² großen Algenteppichs …

| … halbiert sich täglich. | … verringert sich täglich um 20 %. | … nimmt täglich um 80 % zu. | … verdoppelt sich täglich. |
|---|---|---|---|
| | | | |

| A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| $g_1(x) = 2 \cdot 2^x$ | $g_2(x) = 2 \cdot 0{,}2^x$ | $g_3(x) = 2 \cdot 0{,}5^x$ | $g_4(x) = 2 \cdot 1{,}8^x$ | $g_5(x) = 2 \cdot 0{,}5^{-x}$ | $g_6(x) = 2 \cdot 0{,}8^x$ |

**7** Welche der gegebenen Exponentialfunktionen beschreibt eine exponentielle Abnahme?

| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
|---|---|---|---|---|
| $A(t) = 2{,}4 \cdot e^{-0{,}5t}$ | $A(t) = 2{,}4 \cdot 1{,}5^t$ | $A(t) = 2{,}4 \cdot 0{,}5^{-t}$ | $A(t) = 2{,}4 \cdot 0{,}5^t$ | $A(t) = 2{,}4 \cdot e^{0{,}5t}$ |

## Typ-2-Aufgaben Exponentialfunktionen

**1** Die Funktion A mit $A(t) = 10 - 3 \cdot e^{-0{,}18t}$ ($t \geq 0$ in Wochen, $A(t)$ in $m^2$) beschreibt näherungsweise die flächenmäßige Ausbreitung der kleinen Wasserlinse in einem Teich mit $10\,m^2$ Oberfläche.

a) Zeichne mit Technologie den Graphen der Funktion A und gib an, wie viele $m^2$ die kleine Wasserlinse zum Zeitpunkt $t = 0$ bedeckt.

b) Gib an, um wie viel Prozent sich die von der Wasserlinse bedeckte Fläche pro Woche verändert. Wann hat sich der Anfangsbestand der Wasserlinse um 25 % erhöht?

c) Beschreibe, wie sich der Graph der Funktion A ändert, wenn bei $A(t) = 10 - 3 \cdot e^{-0{,}18t}$ der Wert 3 im Intervall [0; 10] variiert. Interpretiere im Kontext.

**2** Von einem besonders langsam wachsendem Zierstrauch wurde der Durchmesser des Stamms $d_1 = 4{,}5\,cm$ bei der Pflanzung sowie der Durchmesser $d_2 = 4{,}9\,cm$ 10 Jahre nach der Pflanzung gemessen. Die Entwicklung des Durchmessers kann für die ersten 10 Jahre mit einem linearen Modell sowie mit Exponentialfunktionen zur Basis a und zur Basis e näherungsweise beschrieben werden.

a) Gib die drei Funktionsgleichungen an, zeichne die Graphen mit Technologie und ermittle, zu welchem Zeitpunkt die exponentiellen Modelle die größte Abweichung vom linearen Modell haben.

b) Beschreibe, wie sich die Erhöhung des Arguments um 1 bei den drei Modellen auf den Funktionswert auswirkt und interpretiere diese Eigenschaft im Kontext.

c) Gib an, was der Differenzenquotient im Zeitraum von 0 bis 10 Jahren über das Wachstum des Strauchdurchmessers aussagt.

**3** Gegeben sind die Funktionen f, g und h mit $f(x) = e^{-\frac{1}{4}x}$, $g(x) = e^{0{,}25x}$, $h(x) = -4 \cdot e^{0{,}25x}$.

a) Zeichne die Graphen von f, g und h und erkläre, wie der Graph von g sowie der Graph von h aus dem Graphen von f hervorgehen.

b) Gib an, welche der drei gegebenen Exponentialfunktionen f, g und h einen Zunahmeprozess beschreiben könnten und begründe.

c) Gib die Gleichung einer Funktion $h_1$ an, die zu h symmetrisch bezüglich der y-Achse liegt. Welche Eigenschaften haben h und $h_1$ gemeinsam, welche sind unterschiedlich?

4 Erdöl und Steinkohle zählen nach wie vor zu den wichtigsten fossilen Energierohstoffen. Im BP Statistical Review of World Energy 2009 wurden für das Jahr 2008 folgende Daten für die weltweiten Reserven und den weltweiten Verbrauch veröffentlicht.

| | Reserven in Millionen Tonnen | Verbrauch in Millionen Tonnen pro Jahr |
|---|---|---|
| Steinkohle | 728436 | 5753,5 |
| Erdöl | 216912 | 3937,1 |

a) Gib die Gleichungen jener Funktionen s und e an, die die jährlich geringer werdenden Reserven an Steinkohle und Erdöl ab dem Jahr 2008 beschreiben, wenn der jährliche Verbrauch konstant bleibt. Zeichne die Graphen von s und e mit Technologie. In welchem Jahr sind die Steinkohlereserven völlig aufgebraucht?

b) Die Weltbevölkerung wächst derzeit mit einer Rate von etwa 1,1 %. Nimm an, dass auch der jährliche Steinkohle- und Erdölverbrauch in diesem Maß steigt. In welchem Jahr sind nun die Steinkohle- und Erdölreserven[1] völlig aufgebraucht?

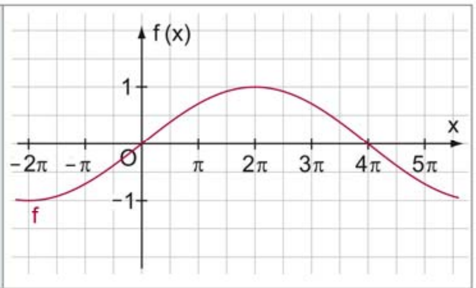
[1] Vernachlässige die Entdeckung und den Abbau weiterer Erdölvorkommen.

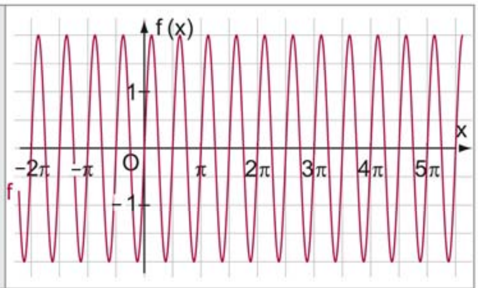
## Kompetenzcheck Winkelfunktionen

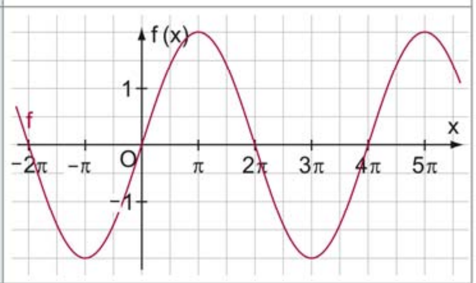
**1** Ordne den Funktionsgleichungen den jeweils passenden Graphen zu.

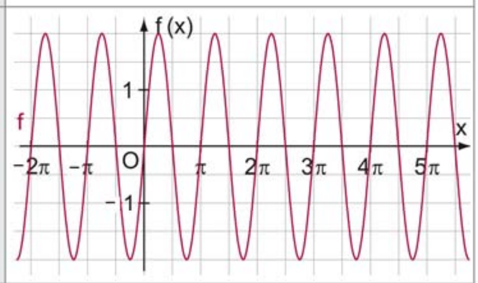
| | |
|---|---|
| $f(x) = \sin(2x)$ | |
| $f(x) = \sin(0{,}5x)$ | |

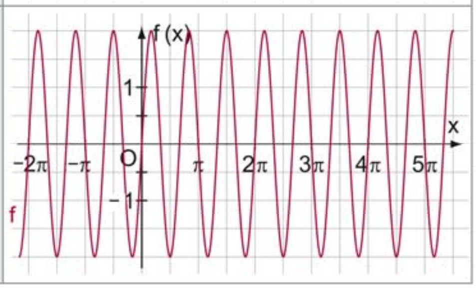
| | |
|---|---|
| $f(x) = \sin(0{,}25x)$ | |
| $f(x) = \sin(3x)$ | |

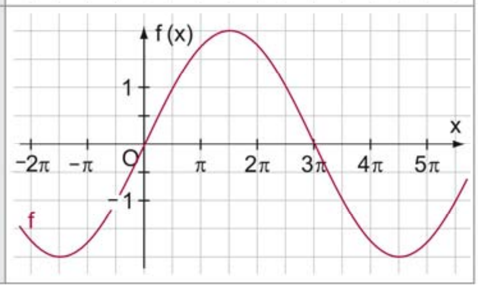
A



B



C



D



E



F



**2** Gib für das Intervall $[0;\ 2\pi)$ die Eigenschaften der Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$ an.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Wertebereich | | Tiefpunkt | |
| Nullstellen | | monoton steigend | |
| Hochpunkt | | monoton fallend | |

**3** Eine Schwingung wird durch die Gleichung $s(t) = 2 \cdot \sin(2t)$ (s in Meter, t in Sekunden) beschrieben.

(1) Gib die Amplitude, die Schwingungsdauer und die Frequenz der Schwingung an.

(2) Ermittle die Elongation zum Zeitpunkt $t = 2$.

(3) Was beschreibt das Koordinatenpaar $(20 \mid 1{,}49)$ in diesem Kontext?

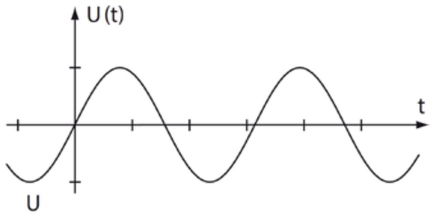
**4** Ordne den Funktionsgleichungen die jeweils passende kleinste Periode p zu.

| $f(x) = \cos(10x)$ | $f(x) = \sin(4x)$ | $s(t) = \sin(2t)$ | $s(t) = 3\sin(t)$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

| A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| $p = \pi$ | $p = 2\pi$ | $p = 3\pi$ | $p = \frac{\pi}{2}$ | $p = \frac{\pi}{4}$ | $p = \frac{\pi}{5}$ |

## Typ-2-Aufgaben Winkelfunktionen

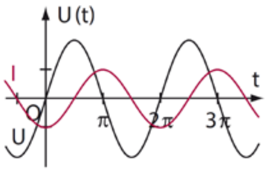
**1** Eine Wechselspannung U wird durch eine Drehbewegung in einem Generator erzeugt und ist deshalb eine harmonische Schwingung. Der zeitliche Verlauf der Wechselspannung wird durch $U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$ beschrieben, wobei $\omega$ die Kreisfrequenz (in $s^{-1}$) und t die Zeit (in s) angibt. Der Wechselstrom I, der durch eine elektrische Schaltung fließt, wird analog durch $I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ mit der Phasenverschiebung $\varphi_0$ angegeben.




a) Welche Bedeutung hat der Faktor $U_0$ bei einer Wechselspannung?

b) Welche kleinste Periode hat eine Wechselspannung, wenn die Kreisfrequenz $\omega = 4\,s^{-1}$ ist?

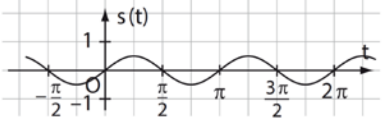
c) Durch einen elektrischen Bauteil erfährt die Stromstärke I eine Phasenverschiebung $\varphi_0$ gegenüber der Wechselspannung U, wie in der Abbildung dargestellt ist.
Durch welche Funktion wird der zeitliche Verlauf der Stromstärke richtig angegeben?
Kreuze die richtige Antwort an.




- ☐ $I(t) = I_0 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$
- ☐ $I(t) = \frac{\pi}{2} \cdot \sin(\omega t)$
- ☐ $I(t) = I_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$
- ☐ $I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t) - \frac{\pi}{2}$
- ☐ $I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega) + \frac{\pi}{2}$

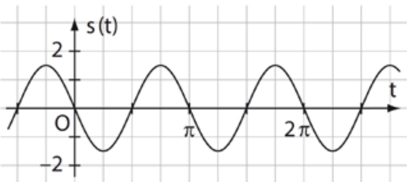
**2** Eine Feder schwingt und führt dabei eine harmonischen Schwingung $s(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ aus.

a) Lies aus der Abbildung die Werte für A, $\omega$ und $\varphi$ ab.

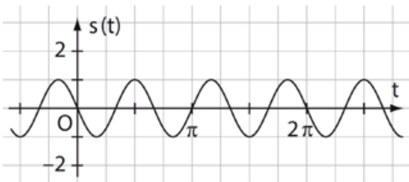



b) Verschieden starke Federn schwingen unterschiedlich schnell. Ihre Schwingungen sind aufgezeichnet worden.

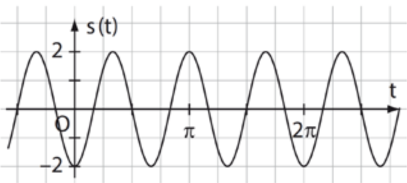
Schwingung A



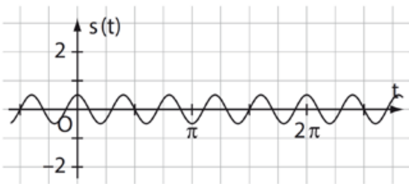

Schwingung B




Schwingung C




Schwingung D




(1) Welche der Schwingungen hat die höchste Frequenz? Begründe deine Entscheidung.

(2) Welche beiden Schwingungen haben dieselbe Frequenz?

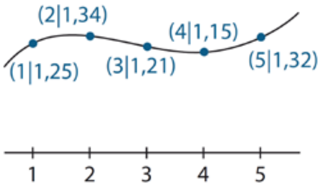
## Kompetenzcheck Reelle Funktionen

**1** Der Wintersportverein eines Orts plant den Neubau einer Schisprungschanze und sucht dazu ein geeignetes Gelände. Für den Aufsprungbereich und den Auslauf kommt ein Hang in Frage, dessen Verlauf näherungsweise durch die Funktion beschrieben werden kann:
$f(x) = 0{,}0004\,x^3 - 0{,}0278\,x^2 - 0{,}3333\,x + 50$ (x waagrechte Entfernung in m, y Höhe in m).

a) Zeichne den Graph der Funktion mit einem elektronischen Tool im Intervall [0; 60].
b) Welche Höhe y hat der Hang bei 30 m?
c) Bei welchem x-Wert beträgt die Höhe 40 m?
d) Wo liegt ungefähr der tiefste Punkt des Aufsprungbereichs?
e) In welchem Intervall ist die Funktion monoton fallend und wo monoton steigend?

**2** Die Tabelle zeigt den Benzinpreis in den ersten fünf Monaten eines Jahres (jeweils am 1.).

| Monat | Benzinpreis |
|---|---|
| Jänner | 1,25 € |
| Februar | 1,34 € |
| März | 1,21 € |
| April | 1,15 € |
| Mai | 1,32 € |




Berechne
a) die absolute Änderung des Benzinpreises im Zeitraum vom 1.1. bis zum 1.2.;
b) die mittlere Änderung im Zeitraum vom 1.1. bis zum 1.3.;
c) die relative Änderung im Zeitraum vom 1.2. bis zum 1.5.;
d) die prozentuelle Änderung im Zeitraum vom 1.3. bis zum 1.5.;
e) den Änderungsfaktor im Zeitraum vom 1.1. bis zum 1.5.

**3** Gegeben ist die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 3x - 1$.
Kreuze die beiden für f zutreffenden Aussagen an.

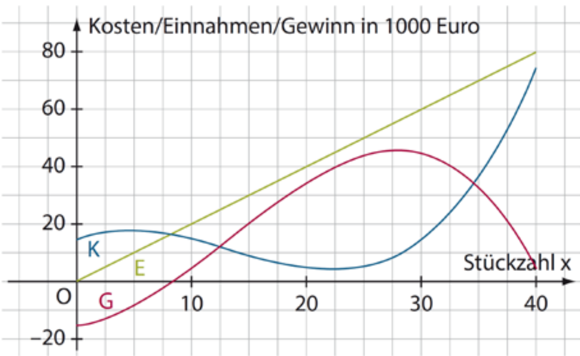
| | |
|---|---|
| Die Funktion hat eine Nullstelle x = 0, weil der Graph die y-Achse bei (0 \| −1) schneidet. | ☐ |
| Die Funktion ist im Intervall $]-\infty; -1]$ streng monoton steigend. | ☐ |
| Die Funktion besitzt zwei lokale Extremstellen. | ☐ |
| Der Graph der Funktion verläuft in einem Koordinatensystem von „links unten" nach „rechts oben", deshalb ist die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ monoton steigend. | ☐ |
| Die Funktion hat genau drei positive Nullstelle. | ☐ |

**4** Bewegt sich ein Körper der konstanten Masse m mit der Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit Radius r, so ist dafür die Zentripetalkraft $F(v, r) = m \cdot \frac{v^2}{r}$ erforderlich.

(1) Durch welchen Funktionstyp wird die Abhängigkeit von F bezüglich des Radius r (bei konstantem v) beschrieben?
(2) Welche Kraft wirkt bei der dreifachen Geschwindigkeit (bei konstantem r)?
(3) Interpretiere den Funktionswert F (3 v, 3 r). Wie verhält sich das Ergebnis zu F (v, r)?
(4) Auf welchen Wert muss die Geschwindigkeit erhöht werden, damit bei gleicher Kreisbahn die zehnfache Kraft wirkt?

## Typ-2-Aufgaben Reelle Funktionen

**1** In einem kleinen Betrieb werden Spezialgeräte hergestellt und verkauft. Bei der Produktion von x Stück eines Produktes innerhalb eines Jahres fallen Herstellungskosten K an. Der Gewinn G ergibt sich aus den Einnahmen E und den Kosten K.




a) Lies für die Gewinnfunktion G die Nullstelle $x_1$ und die Extremstelle $x_2$ ab. Gib die Funktionswerte $G(x_1)$ und $G(x_2)$ an. Welche Bedeutung haben die vier Werte für den Betrieb?

b) Ermittle mithilfe der Grafik $\Delta E$ sowie den Differenzenquotienten im Intervall [10; 30]. Interpretiere $\Delta E$ bzw. den Differenzenquotienten im vorliegenden Zusammenhang.

c) Beschreibe das Monotonieverhalten der Kostenfunktion im Intervall [0; 40] und die praktische Bedeutung.

d) Zeige für x = 15, dass $G(x) = E(x) - K(x)$ gilt. Bei welchen jährlichen Stückzahlen macht der Betrieb Verlust, bei welchen Gewinn?

**2** Bei einem Hochwasser tritt endlich Entspannung ein. Der Pegelstand des Flusses hat seine höchste Marke von 4,80 m erreicht und sinkt nun. Die Höhe des Pegelstandes für die folgenden 10 Stunden kann durch die Funktion h(t) mit t in Stunden und h in m beschrieben werden.

a) Die Höhe des Pegelstandes wird durch $h_1(t) = 4{,}80 - 0{,}30\,t$ beschrieben.
Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an.
- ☐ Die absoluten Änderungen von h in den Zeitintervallen [1; 3] und [3; 6] sind gleich groß.
- ☐ Die mittleren Änderungen von f in den Zeitintervallen [1; 3] und [3; 6] sind gleich groß.
- ☐ Die prozentuellen Änderungen von f in den Zeitintervallen [1; 3] und [3; 6] sind gleich groß.

b) Die Höhe des Pegelstandes wird durch $h_2(t) = 4{,}0 \cdot 0{,}9375^t$ beschrieben.
Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an.
- ☐ Die absoluten Änderungen von h in den Zeitintervallen [1; 3] und [3; 6] sind gleich groß.
- ☐ Die mittleren Änderungen von f in den Zeitintervallen [1; 3] und [3; 6] sind gleich groß.
- ☐ Die prozentuellen Änderungen von f in den Zeitintervallen [1; 3] und [4; 6] sind gleich groß.

c) Welches Monotonieverhalten liegt bei den Funktionen $h_1$ bzw. $h_2$ im Intervall [0; 10] vor? Wie kann das Monotonieverhalten jeweils aus dem Funktionsterm abgelesen werden?

d) Existiert für die Funktionen $h_1$ bzw. $h_2$ im Intervall [0; 10] eine Nullstelle? Existiert für die Funktionen $h_1$ bzw. $h_2$ eine Nullstelle, wenn die Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind? Begründe.