Substitutionsverfahren

Arbeitsblatt

Beim Differenzieren verketteter Funktionen, also Funktionen der Form f(g(x)), hast du die Ableitung mithilfe der Kettenregel bestimmt.

z. B. $f(x) = (2x + 4)^{10} \Rightarrow f'(x) = 10\cdot(2x + 4)^9\cdot 2$

Zum Integrieren derartiger Funktionen wird meist das sogenannte Substitutionsverfahren angewandt. Das Ziel dieses Verfahrens ist es, den Integranden durch geschicktes Substituieren zu vereinfachen.

Beispiel: Berechne das bestimmte Integral $\int_0^1 (2+5x)^7\,dx$.

Lösung:

Substituiere $t = 2 + 5x$.

Da durch die Substitution in $\int_0^1 (2+5x)^7\,dx$ nicht mehr nach x integriert werden kann, muss ein entsprechender Ausdruck für dx gefunden werden.

Dazu wird die Ableitung von t nach x gebildet, d. h. $t' = \frac{dt}{dx}$.

$\frac{dt}{dx} = 5$

Wird das Differential dx als Variable betrachtet, kann durch Umformen dx ermittelt werden.

Aus $\frac{dt}{dx} = 5$ folgt: $dx = \frac{1}{5}dt$

Nun werden die Integrationsgrenzen durch Einsetzen in $t = 2 + 5x$ passend zur vorgenommenen Substitution ermittelt.
Für die untere Grenze gilt $x = 0$; daraus folgt durch Einsetzen in $t = 2 + 5x$ für $t = 2$.
Für die obere Grenze gilt $x = 1$; daraus folgt durch Einsetzen in $t = 2 + 5x$ für $t = 7$.

Jetzt kann das Integral auf folgende Art berechnet werden:

$$\int_0^1 (2+5x)^7\cdot dx = \int_2^7 t^7\cdot\frac{1}{5}\cdot dt = \frac{1}{5}\cdot\int_2^7 t^7\cdot dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^8}{8}\Big|_2^7 = \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{7^8}{8}-\frac{2^8}{8}\right)\approx 144\,113{,}6$$

1 Berechne das bestimmte bzw. unbestimmte Integral.

a) $\int_{-1}^{-0{,}75} (-3-4x)^{12}\,dx$ b) $\int_{-2}^{-1} (2x-1)^5\,dx$ c) $\int (2u+3)^2\,du$ d) $\int (4\varphi-3)^2\,d\varphi$

Beispiel: Berechne das bestimmte Integral $\int_1^3 \frac{3}{4x+1}dx$.

Lösung:

Substituiere für $t = 4x + 1$.

Bilde die Ableitung von t nach x und forme $t' = \frac{dt}{dx}$ nach dx um.

$\frac{dt}{dx} = 4 \Rightarrow dx = \frac{1}{4}dt$

Nun werden die Integrationsgrenzen durch Einsetzen in $t = 4x + 1$ passend zur vorgenommenen Substitution ermittelt.
Für die untere Grenze gilt $x = 1$; daraus folgt durch Einsetzen in $t = 4x + 1$ für $t = 5$.
Für die obere Grenze gilt $x = 3$; daraus folgt durch Einsetzen in $t = 4x + 1$ für $t = 13$.
Jetzt kann das Integral auf folgende Art berechnet werden:

$$\int_1^3 \frac{3}{4x+1}dx = \int_5^{13} \frac{3}{t}\cdot\frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\cdot\int_5^{13}\frac{3}{t}dt = \frac{3}{4}\cdot \ln t\Big|_5^{13} = \frac{3}{4}\cdot(\ln 13 - \ln 5) \approx 0,24$$

2 Berechne das bestimmte bzw. unbestimmte Integral.

a) $\int_0^2 \frac{1}{2x+3}dx$ b) $\int_1^4 \frac{2}{4x-2}dx$ c) $\int \frac{5}{4u-2}du$ d) $\int \frac{1}{(2\varphi+3)^2}d\varphi$

Beispiel: Berechne das bestimmte Integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(3x)dx$.

Lösung:

Substituiere für $t = 3x$.

Bilde die Ableitung von t nach x und forme $t' = \frac{dt}{dx}$ nach dx um.

$\frac{dt}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt$

Nun werden die Integrationsgrenzen durch Einsetzen in $3x = t$ passend zur vorgenommenen Substitution ermittelt.
Für die untere Grenze gilt $x = 0$; daraus folgt aus $t = 3x$ für $t = 0$.
Für die obere Grenze gilt $x = \frac{\pi}{4}$; daraus folgt aus $t = 3x$ für $t = \frac{3\pi}{4}$.
Jetzt kann das Integral auf folgende Art berechnet werden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(3x)dx = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin(t)\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\cdot\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\sin(t)dt = \frac{1}{3}\cdot(-\cos(t))\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{3}\cdot\left(-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\cos(0)\right) \approx 0,57$$

3 Berechne das bestimmte bzw. unbestimmte Integral.

a) $\int_0^1 \cos(3x)dx$ b) $\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$ c) $\int \sin\left(\frac{u}{2}+\pi\right)du$ d) $\int \cos\left(\frac{3\varphi}{2}+2\pi\right)d\varphi$

Beispiel: Berechne das bestimmte Integral $\int_0^1 e^{5x}\,dx$.

Lösung:

Substituiere für t = 5x.

Bilde die Ableitung von t nach x und forme $t' = \frac{dt}{dx}$ nach dx um.

$\frac{dt}{dx} = 5 \Rightarrow dx = \frac{1}{5}dt$

Nun werden die Integrationsgrenzen durch Einsetzen in t = 5x passend zur vorgenommenen Substitution ermittelt.
Für die untere Grenze gilt x = 0; daraus folgt aus t = 5x für t = 0.
Für die obere Grenze gilt x = 1; daraus folgt aus t = 5x für t = 5.

Nach der Substitutionsregel gilt:

$$\int_0^1 e^{5x}\,dx = \int_0^5 e^t \cdot \frac{1}{5}dt = \frac{1}{5}\cdot\int_0^5 e^t\,dt = \frac{1}{5}\cdot e^t\Big|_0^5 = \frac{1}{5}\cdot\left(e^5 - e^0\right) \approx 29{,}48$$

4 Berechne das bestimmte bzw. unbestimmte Integral.

a) $\int_0^3 e^{3x}\,dx$ b) $\int_2^4 e^{-2x}\,dx$ c) $\int e^{\varphi+1}\,d\varphi$ d) $\int e^{2u+3}\,du$