Partielle Integration

Arbeitsblatt

In *Dimensionen Mathematik 7* hast du die **Produktregel** zum Ableiten eines Produkts von zwei Funktionen kennen gelernt.

Wenn u und v in einem Intervall [a; b] differenzierbar sind, dann gilt:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Sind auch die Ableitungen u' und v' stetig, so kannst du beide Seiten der Gleichung integrieren:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx + \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx$$

Wende auf der linken Seite der Gleichung den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an.

$$u(x) \cdot v(x)\,\Big|_a^b = \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx + \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx$$

Durch Umformen entsteht:

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx = u(x) \cdot v(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx$$

Satz (Partielle Integration):
Sind u und v differenzierbar und ihre Ableitungen u' und v' stetig, dann gilt:

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx = u(x) \cdot v(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx$$

In manchen Formelheften findest du den Satz für die partielle Integration in vereinfachter Kurzform angeschrieben.

$$\int f \cdot g = F \cdot g - \int F \cdot g'$$

Die Grundidee der partiellen Integration ist, das Integral der linken Seite in ein einfacher zu lösendes Integral auf der rechten Seite überzuführen. Da auf der rechten Seite nur teilweise ein Integral zu berechnen ist, heißt dieses Integrationsverfahren **partielles Integrieren** oder **partielle Integration**.

Beispiel: Berechne das bestimmte Integral $\int_0^2 e^x \cdot x\,dx$.

Lösung:

$$\int_0^2 e^x \cdot x\,dx = \int_0^2 \underbrace{e^x}_{u'} \cdot \underbrace{x}_{v}\,dx$$

$$u'(x) = e^x \Rightarrow u(x) = e^x \qquad v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Für die Funktion v(x) wird x gewählt, weil beim Differenzieren der Grad um 1 erniedrigt wird und die Funktion dadurch „einfacher“ wird.

$$\int_0^2 \underbrace{e^x}_{u'} \cdot \underbrace{x}_{v}\,dx = \underbrace{e^x}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v}\,\Big|_0^2 - \int_0^2 \underbrace{e^x}_{u} \cdot \underbrace{1}_{v'}\,dx = e^x \cdot x\,\Big|_0^2 - e^x\,\Big|_0^2 = e^2 \cdot 2 - (e^2 - 1) = e^2 + 1 \approx 8{,}39$$

$\boxed{1}$ Berechne das bestimmte Integral.

a) $\int_1^e x \cdot \ln(x)\,dx$ b) $\int_0^1 e^{-x} \cdot x\,dx$ c) $\int_2^3 x \cdot 2^x\,dx$ d) $\int_0^\pi x \cdot \cos x\,dx$

Beispiel: Berechne das bestimmte Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin(x)\,dx$.

Lösung:

Der Ansatz

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v}\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{2} \cdot \cos(x)\,dx$$

führt nicht zu einem Integral, das leichter berechenbar ist. Er ist deshalb unbrauchbar.

Vertauschst du die Reihenfolge der Faktoren x und sin(x), erhältst du einen Ansatz, der zum Erfolg führt.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin(x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(x)}_{u'} \cdot \underbrace{x}_{v}\ dx = -\cos(x) \cdot x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(x)) \cdot 1\ dx$$

$$= -\cos(x) \cdot x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 1 = 1$$

Beispiel: Berechne das bestimmte Integral $\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx$.

Lösung:

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{\pi} \underbrace{\sin(x)}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v}\,dx = -\cos(x) \cdot \sin(x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos(x)) \cdot \cos(x)\,dx$$

$$= -\cos(x) \cdot \sin(x)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx = 0 + \int_0^{\pi} (1 - \sin^2(x))\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} 1\,dx - \int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \pi - \int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx$$

Vergleiche Anfang und Ende der Berechnung.
Du erkennst, dass du hier durch partielles Integrieren wieder das ursprüngliche Integral erhalten hast.

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \pi - \int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx$$

Durch Umformen dieser Gleichung lässt sich das Ergebnis ermitteln.

$$2 \cdot \int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \pi$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

In manchen Fällen führt erst das zwei- oder mehrmalige Anwenden der partiellen Integration zum Erfolg.

Beispiel: Berechne das bestimmte Integral $\int_1^2 2^x \cdot x^2\,dx$.

L°sung:

$$\int_1^2 \underbrace{2^x}_{u'} \cdot \underbrace{x^2}_{v}\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} \cdot x^2 \Big|_1^2 - \frac{2}{\ln 2}\int_1^2 \underbrace{2^x}_{u'} \cdot \underbrace{x}_{v}\,dx$$

$$= \frac{14}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \cdot \left(\frac{2^x}{\ln 2} \cdot x \Big|_1^2 - \frac{1}{\ln 2}\int_1^2 2^x\,dx \right)$$

$$= \frac{14}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \cdot \left(\frac{6}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int_1^2 2^x\,dx \right)$$

$$= \frac{14}{\ln 2} - \frac{12}{(\ln 2)^2} + \frac{2}{(\ln 2)^2} \cdot \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_1^2$$

$$= \frac{14}{\ln 2} - \frac{12}{(\ln 2)^2} + \frac{4}{(\ln 2)^3} \approx 7{,}232$$

Aufgaben

2 Berechne das bestimmte Integral.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(x)\,dx$ b) $\int_0^{\pi} \frac{x}{3} \cdot \cos(x)\,dx$ c) $\int_0^{\pi} \frac{x}{2} \cdot \cos(3x)\,dx$

3 Berechne das bestimmte Integral.

a) $\int_0^1 x \cdot e^{2x}\,dx$ b) $\int_0^1 x \cdot e^{\frac{x}{2}}\,dx$ c) $\int_1^2 x \cdot 2^x\,dx$

4 Berechne das bestimmte Integral.

a) $\int_1^e x^2 \cdot \ln(x)\,dx$ b) $\int_1^e x^3 \cdot \ln(x)\,dx$ c) $\int_1^e x^k \cdot \ln(x)\,dx \ (k \in \mathbb{N}^*)$

5 Berechne das bestimmte Integral.

a) $\int_0^{\pi} e^x \cdot \cos(x)\,dx$ b) $\int_0^{\pi} e^x \cdot \sin(x)\,dx$ c) $\int_0^{\pi} e^{-x} \cdot \sin(x)\,dx$

6 Berechne das bestimmte Integral.

a) $\int_0^{\pi} \sin(x) \cdot \cos(x)\,dx$ b) $\int_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx$

7 Berechne das bestimmte Integral durch mehrmaliges partielles Integrieren.

a) $\int_1^2 x^2 \cdot e^x\,dx$ b) $\int_{-1}^1 x^2 \cdot e^{-x}\,dx$ c) $\int_0^{\pi} x^2 \cdot \cos(x)\,dx$