Integration rationaler Funktionen mithilfe der Partialbruchzerlegung

Arbeitsblatt

Das Arbeitsblatt zeigt dir ein Verfahren, mit dem du die Stammfunktionen rationaler Funktionen ermitteln kannst. Die rationale Funktion wird dazu in Teilbrüche (Partialbrüche) zerlegt. Dieses Verfahren lässt sich nur anwenden, wenn das Polynom im Nenner reelle Nullstellen besitzt.
Tipp: Bearbeite zuerst das Arbeitsblatt Substitutionsverfahren.

Der Grad des Polynoms im Zähler ist kleiner als der Grad des Polynoms im Nenner

Beispiel: Berechne $\int_6^{10} \frac{x+2}{x^2-2x-15}\,dx$.

Lösung:

Berechne zuerst die Nullstellen des Polynoms im Nenner.	$x^2-2x-15=0 \Rightarrow \; x_1=5$ und $x_2=-3$
Spalte das Nennerpolynom in Linearfaktoren auf.	$x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$
Zerlege den Bruch in Teilbrüche.	$\frac{x+2}{x^2-2x-15}=\frac{x+2}{(x-5)(x+3)}$ $\frac{x+2}{(x-5)(x+3)}=\frac{A}{(x-5)}+\frac{B}{(x+3)}$
A und B werden durch entsprechendes Erweitern und anschließendes Vergleichen der Koeffizienten berechnet.	$\frac{x+2}{(x-5)(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x-5)}{(x-5)(x+3)} \quad \vert\cdot(x-5)(x+3)$ $x+2=Ax+3A+Bx-5B$ $1x+2=(A+B)x+(3A-5B)$
Gleichungssystem lösen.	$\left.\begin{array}{l}1=A+B\\2=3A-5B\end{array}\right\} \Rightarrow A=\frac{7}{8}$ und $B=\frac{1}{8}$
Zerlege den ursprünglichen Bruch nun in zwei Teilbrüche.	$\frac{x+2}{x^2-2x-15}=\frac{7}{8\cdot(x-5)}+\frac{1}{8\cdot(x+3)}$
Berechne die einzelnen Integrale mithilfe des Substitutionsverfahrens.	$\int_6^{10}\frac{x+2}{x^2-2x-15}dx=\int_6^{10}\frac{7}{8\cdot(x-5)}dx+\int_6^{10}\frac{1}{8\cdot(x+3)}dx$ $=\frac{7}{8}\cdot\int_6^{10}\frac{1}{x-5}dx+\frac{1}{8}\cdot\int_6^{10}\frac{1}{x+3}dx$ $=\left(\frac{7}{8}\cdot\ln\vert x-5\vert+\frac{1}{8}\cdot\ln\vert x+3\vert\right)\Big\vert_6^{10}\approx 1{,}454$

1 Berechne: a) $\int_5^9 \frac{5x-8}{x^2-2x-8}dx$ b) $\int_2^3 \frac{8-x}{x^2-x}dx$ c) $\int_3^4 \frac{1}{x^2-4}dx$

Der Grad des Polynoms im Zähler ist größer als der Grad des Polynoms im Nenner

Beispiel: Berechne $\int\limits_{-1}^{1} \frac{5x^4-2x^3-5x^2+3x-1}{x^3-3x^2-4x+12}dx$.

Lösung:

Zerlege die rationale Funktion mithilfe einer Polynomdivision in ein Polynom und eine echt-rationale Funktion (Grad des Zählerpolynoms ist kleiner als der Grad des Nennerpolynoms).	$\begin{aligned}&(5x^4-2x^3-5x^2+3x-1):(x^3-3x^2-4x+12)=5x+13\\ &\underline{\pm 5x^4 \mp 15x^3 \mp 20x^2 \pm 60x}\\ &\qquad 13x^3+15x^2-57x-1\\ &\qquad \underline{\pm 13x^3 \mp 39x^2 \mp 52x \pm 156}\\ &\qquad\qquad 54x^2-5x-157 \quad \text{Rest}\end{aligned}$ $\frac{5x^4-2x^3-5x^2+3x-1}{x^3-3x^2-4x+12}=5x+13+\frac{54x^2-5x-157}{x^3-3x^2-4x+12}$
Berechne die Nullstellen des Nennerpolynoms.	$x^3-3x^2-4x+12=0 \Rightarrow x_1=3,\ x_2=2$ und $x_3=-2$
Spalte das Nennerpolynom in Linearfaktoren auf und zerlege den Bruch in Teilbrüche.	$x^3-3x^2-4x+12=(x-3)(x-2)(x+2)$ $\frac{54x^2-5x-157}{(x-3)(x-2)(x+2)}=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x+2)}$
A, B und C werden durch entsprechendes Erweitern und anschließendes Vergleichen der Koeffizienten berechnet.	$\frac{54x^2-5x-157}{(x-2)(x-3)(x+2)}=\frac{A(x^2-4)+B(x^2-x-6)+C(x^2-5x+6)}{(x-2)(x-3)(x+2)}$ $54x^2-5x-157=Ax^2-4A+Bx^2-Bx-6B+Cx^2-5Cx+6C$ $54x^2-5x-157=(A+B+C)x^2+(-B-5C)x+(-4A-6B+6C)$ $\left.\begin{aligned}54&=A+B+C\\ -5&=-B-5C\\ -157&=-4A-6B+6C\end{aligned}\right\} \Rightarrow A=\frac{314}{5},\ B=-\frac{49}{4},\ C=\frac{69}{20}$
Berechne nun die einzelnen Integrale mit dem Substitutionsverfahren.	$\frac{54x^2-5x-157}{(x-3)(x-2)(x+2)}=\frac{314}{5(x-3)}-\frac{49}{4(x-2)}+\frac{69}{20(x+2)}$ $\int\limits_{-1}^{1}\frac{5x^4-2x^3-5x^2+3x-1}{x^3-3x^2-4x+12}dx=\int\limits_{-1}^{1}(5x+13+\frac{314}{5(x-3)}-\frac{49}{4(x-2)}+\frac{69}{20(x+2)})dx$ $=\left(\frac{5x^2}{2}+13x+\frac{314}{5}\ln\lvert x-3\rvert-\frac{49}{4}\ln\lvert x-2\rvert+\frac{69}{20}\ln\lvert x+2\rvert\right)\Bigg\vert_{-1}^{1}\approx -0{,}28$

2 Berechne: $\int\limits_{0,5}^{1}\frac{3x^4+11x^3-13x^2-40x+4}{x^3+4x^2-4x-16}dx$

3 Berechne: $\int\limits_{-1}^{1}\frac{3x^3-8x^2-7x+22}{x^2-x-6}dx$

4 Berechne: a) $\int\limits_{2}^{4}\frac{x}{x^2-1}dx$ b) $\int\limits_{2}^{4}\frac{x^2}{x^2-1}dx$

5 Berechne: $\int\limits_{2}^{3}\frac{x^3}{x^2+x-2}dx$

6 Berechne: $\int\limits_{-3}^{-1}\frac{x^2}{(x-1)^2}dx$ *Anleitung:* $\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}$

7 Berechne: $\int\limits_{1}^{3}\frac{2x^2-5x-3}{x^3-3x^2}dx$ *Anleitung:* $\frac{2x^2-5x-3}{x^3-3x^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-3}$