Komplexe Polynomdivision

Arbeitsblatt

Beispiel:
Von der Gleichung $x^3 - 3x^2 - 8x + 30 = 0$ kennt man die Lösung $x_1 = 3 + i$. Berechne die weiteren Lösungen der Gleichung.

Lösung:
Überprüfe durch Abspalten von x_1, ob x_1 tatsächlich Lösung der Gleichung ist, und bestimme alle weiteren Lösungen.
Führe nun die Polynomdivision ganz analog zur Division von Polynomen mit reellen Koeffizienten durch.

$$(x^3 - 3x^2 - 8x + 30) : \big(x - (3 + i)\big) = x^2 + i \cdot x + 3i - 9 = x^2 - 9 + i \cdot (x + 3)$$

$$\begin{array}{l}
x^3 - (3 + i) \cdot x^2 \\
x^3 - 3x^2 - i \cdot x^2 \\
\underline{- x^3 + 3x^2 + i \cdot x^2} \\
\quad + i \cdot x^2 - 8x \\
\quad + i \cdot x^2 - (3 + i) \cdot (i \cdot x) \\
\quad + i \cdot x^2 - 3i \cdot x + x \\
\quad \underline{- i \cdot x^2 + 3i \cdot x - x} \\
\qquad 3i \cdot x - 9x + 30 \\
\qquad 3i \cdot x - (3 + i) \cdot 3i \\
\qquad 3i \cdot x - 9i + 3 \\
\qquad \underline{-3i \cdot x + 9i - 3} \\
\qquad\quad - 9x + 9i + 27 \\
\qquad\quad - 9x + 9 \cdot (3 + i) \\
\qquad\quad - 9x + 27 + 9i \\
\qquad\quad \underline{+ 9x - 27 - 9i} \\
\qquad\qquad 0 \text{ Rest}
\end{array}$$

Nebenrechnung: $-(3 + i) \cdot x^2 = -3x^2 - i \cdot x^2$

Nebenrechnung: $-(3 + i) \cdot (i \cdot x) = -3i \cdot x - i^2 \cdot x = -3i \cdot x + x$

Nebenrechnung: $-(3 + i) \cdot 3i = -9i - 3i^2 = -9i + 3$

Nebenrechnung: $+9 \cdot (3 + i) = +27 + 9i$

$\mathbf{x_1 = 3 + i}$ lässt sich also ohne Rest von der gegebenen Gleichung abspalten und ist daher Lösung der Gleichung.
Da die ursprüngliche Gleichung nur reelle Koeffizienten enthält, muss zu jeder echt-komplexen Lösung auch die konjugiert-komplexe Zahl als Lösung auftreten.
Daher ist auch $\mathbf{x_2 = \overline{x_1} = 3 - i}$ eine Lösung der Gleichung. Nun wird x_2 durch eine weitere *komplexe* Polynomdivision von $(\ x^2 - 9 + i \cdot (x + 3)\ )$ abgespaltet.

$$\big(x^2 - 9 + i \cdot (x + 3)\big) : \big(x - (3 - i)\big) = x + 3$$

$$\begin{array}{l}
x^2 - (3 - i) \cdot x \\
x^2 - 3x + i \cdot x \\
\underline{-x^2 + 3x - i \cdot x} \\
\quad + 3x - i \cdot x - 9 \\
\quad + 3x - 3 \cdot (3 - i) \\
\quad + 3x - 9 + 3i \\
\quad \underline{- 3x + 9 - 3i} \\
\qquad - 3i - i \cdot x + i \cdot (x + 3) \\
\qquad\; 0 \text{ Rest}
\end{array}$$

Nebenrechnung: $-3i - i \cdot x + i \cdot (x + 3) = -3i - i \cdot x + i \cdot x + 3i = 0$

Aus dem Ergebnis $\mathbf{x + 3}$ lässt sich die dritte Lösung der Gleichung $\mathbf{x_3 = -3}$ ablesen. Insgesamt hat die Gleichung $x^3 - 3x^2 - 8x + 30 = 0$ die Lösungsmenge $\mathbf{L = \{3 + i; 3 - i; -3\}}$.

Aufgaben

1
a) $(x^2 - 2x - 2 + 4i) : (x - 3 + i) =$
b) $(x^2 + (-2 - 6i)x - 11 + 2i) : \big(x - (3 + 4i)\big) =$

2
a) $\big(x^3 + (-9 - 3i)x^2 + (27 + 20i)x - 29 - 37i\big) : (x - 4 - i) =$
b) $\big(x^3 + (-5 - i)x^2 + (9 + 4i)x - 5 - 5i\big) : \big(x - (2 - i)\big) =$

3
Eine Lösung der Gleichung $x^2 + (-5 + i)x + 8 - i = 0$ ist $x_1 = 2 + i$. Wie lautet die andere Lösung dieser Gleichung?

4
Eine Lösung der Gleichung $x^3 + (-7 + i)x^2 + (19 - 6i)\,x - 13 + 13i = 0$ ist $x_1 = 3 + 2i$. Wie lauten die beiden anderen Lösungen der Gleichung?

Komplexe Polynomdivision

Arbeitsblatt – Lösungen

1
a) $x + 1 - i$
b) $x + 1 - 2i$

2
a) $x^2 + (-5 - 2i)x + 9 + 7i$
b) $x^2 + (-3 - 2i)x + 1 + 3i$

3
$x_2 = 3 - 2i$

4
$x_2 = 3 - 2i$; $x_3 = 1 - i$