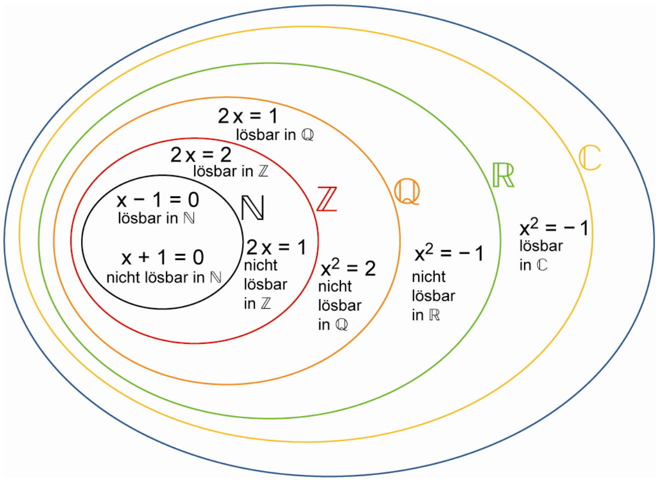
Exkurs: Weitere Zahlenbereiche

Informationsblatt



Nach der Einführung der komplexen Zahlen stellt sich die Frage, ob sich die Zahlenbereiche auch über ℂ hinaus erweitern lassen. Die Antwort lautet: Ja!

Die **Quaternionen** sind ähnlich den komplexen Zahlen. Zu einer reellen Zahl a werden drei imaginäre Einheiten i, j und k hinzugefügt.

Beispiel:
$q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$, wobei für i, j und k gilt:
$i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$.
Quaternionen werden beispielsweise für die Beschreibung von Drehungen im dreidimensionalen Raum verwendet. Diese Darstellungen werden besonders bei Computerspielen sowie der Steuerung von Satelliten benutzt. In der Physik haben die Quaternionen Vorteile auf den Gebieten der Mechanik, der Wellengleichungen, der Speziellen Relativitätstheorie und Gravitation sowie der Quantenmechanik gebracht.

Darüber hinaus gibt es die sogenannten **Oktaven**. Hier werden die sieben imaginären Einheiten i, j, k, l, m, n und o verwendet, für die gilt:

$$i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = m^2 = n^2 = o^2 = -1$$
$$i = jk = lm = on = -kj = -ml = -no$$
$$j = ki = ln = mo = -ik = -nl = -om$$
$$k = ij = lo = nm = -ji = -ol = -mn$$

$$l = mi = nj = ok = -im = -jn = -ko$$
$$m = il = oj = kn = -li = -jo = -nk$$
$$n = jl = io = mk = -lj = -oi = -km$$
$$o = ni = jm = kl = -in = -mj = -lk$$

Die Erweiterung der Zahlbereiche bringt stets gewisse Vorteile, aber auch Nachteile mit sich. So gelten in ℂ zwar alle Rechenregeln, aber die Ordnung geht „verloren“. Bei jeder neuen Zahlenbereichserweiterung gehen gewisse Rechenregeln oder Rechengesetze verloren, andere kommen hinzu. Bei den Quaternionen gilt beispielsweise das Kommutativgesetz der Multiplikation $a \cdot b = b \cdot a$ nicht mehr, das Assoziativgesetz $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ jedoch schon. Bei den Oktaven hingegen gilt das Assoziativgesetz der Multiplikation nicht mehr, dafür aber haben sie andere spannende Eigenschaften.