Multiplizieren und Dividieren komplexer Zahlen in Polardarstellung

Arbeitsblatt

Im folgenden Arbeitsblatt lernst du das Rechnen mit komplexen Zahlen in Polardarstellung kennen. Multiplizieren und Dividieren komplexer Zahlen lassen sich in Polardarstellung einfacher als in der Form $a + b \cdot i$ durchführen.

Neues Wissen

Multiplizieren komplexer Zahlen in Polardarstellung

1
(1) Gebt die Zahlen $z_1 = i$ und $z_2 = 1 + i$ in Polardarstellung (Paarschreibweise) an.
(2) Berechnet das Produkt $z_3 = z_1 \cdot z_2$ und gebt das Produkt in Polardarstellung (Paarschreibweise) an.
(3) Vergleicht die Radien r und die Polarwinkel φ von z_1, z_2 und z_3. Welche Regel lässt sich vermuten?

Um die **Multiplikationsregel für komplexe Zahlen in Polardarstellung** herzuleiten, verwendest du die **Additionstheoreme** von Sinus und Cosinus:

(1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$ $\quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha$

(2) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ $\quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

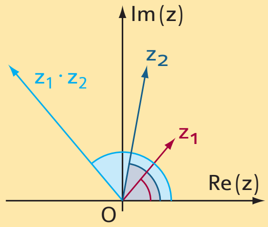
Für komplexe Zahlen $z_1 = (r_1 | \varphi_1) = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$ und $z_2 = (r_2 | \varphi_2) = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$ gilt:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)] \cdot [r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)] \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot \left((\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i^2 \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i \cdot (\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1)\right) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot \left((\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i \cdot (\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1)\right). \end{aligned}$$

Aufgrund von (1) und (2) kann das Produkt $z_1 \cdot z_2$ zu einem Produkt der Form
$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) = (r_1 \cdot r_2 | \varphi_1 + \varphi_2)$ zusammengefasst werden.

▷ **Multiplikationsregel für komplexe Zahlen in Polardarstellung**
$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2 | \varphi_1 + \varphi_2)$

Bei der **Multiplikation** zweier komplexer Zahlen in Polarform werden die **Radien multipliziert** und die **Polarwinkel addiert**.



▷ *Beispiel:*
Berechne $z_1 \cdot z_2$ für $z_1 = (0{,}8 | 50°)$, $z_2 = (1{,}3 | 80°)$

Lösung:
$z_1 \cdot z_2 = (0{,}8 \cdot 1{,}3 | 50° + 80°) = (1{,}04 | 130°)$

2
Berechne das Produkt der komplexen Zahlen $z_1 = (2{,}5 | 45°)$ und $z_2 = (2 | 145°)$.

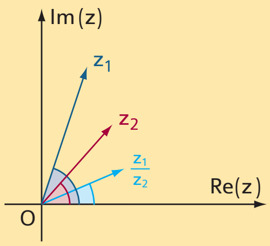
Dividieren komplexer Zahlen in Polardarstellung

Für das Dividieren komplexer Zahlen in Polardarstellung gibt es eine ebenso einfache Regel.

▷ **Divisionsregel für komplexe Zahlen in Polardarstellung**

$z_1 : z_2 = (r_1 : r_2 \mid \varphi_1 - \varphi_2)$

Bei der **Division** zweier komplexer Zahlen in Polarform werden die **Radien dividiert** und die **Polarwinkel subtrahiert**.



Herleitung der Divisionsregel für komplexe Zahlen

Analog zur Multiplikationsregel kannst du die Divisionsregel herleiten.
Du benötigst dabei ebenfalls die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus.

▷ **Additionstheoreme für Sinus und Cosinus**

(1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$ $\quad$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$

(2) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ $\quad$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

Zeige, dass für die komplexen Zahlen

$z_1 = (r_1 \mid \varphi_1) = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$ und $z_2 = (r_2 \mid \varphi_2) = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$

die Regel

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \middle| \varphi_1 - \varphi_2\right) = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

gilt.

Versuche die folgenden Umformungsschritte nachzuvollziehen.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)}$	
$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2}$	Zerlege den Bruch so in ein Produkt- zweier Brüche, dass Radien und Winkel in getrennten Brüchen vorkommen.
$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 - i \cdot \sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2) \cdot (\cos\varphi_2 - i \cdot \sin\varphi_2)}$	Erweitere den Bruch mit der konjugiert-komplexen Zal des Nenners, um den Nenner rational zu machen.
$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 - i \cdot \sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}$	Berechne den Nenner.

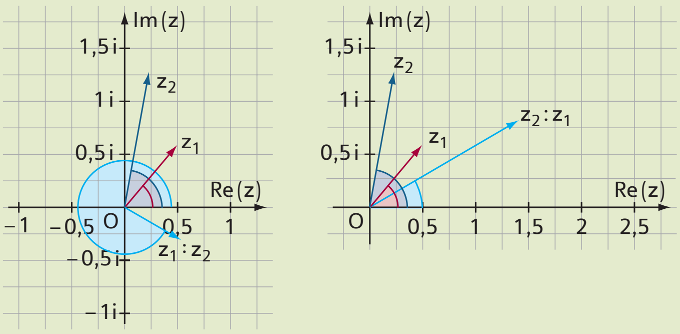
$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 - i \cdot \sin\varphi_2)]$	Wende den Zusammenhang $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ an.
$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \cdot i \cdot \sin\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - i \cdot \sin\varphi_1 \cdot i \cdot \sin\varphi_2]$	Multipliziere die beiden Klammerausdrücke.
$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - i^2 \cdot \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - i \cdot \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2]$	Wende das Kommutativgesetz an, um Real- und Imaginärteil zu trennen.
$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i \cdot (\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)$	Wende die Definition von i^2 an bzw. hebe i heraus.
$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot (\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$	Wende die Additionstheoreme (1) und (2) an.
$= \left(\frac{r_1}{r_2} \middle\vert \varphi_1 - \varphi_2\right)$	Schreibe den Ausdruck in Koordinatenform an.

▷ *Beispiel:*
Berechne $z_1 : z_2$ und $z_2 : z_1$ für $z_1 = (0{,}8 \,|\, 50°)$ und $z_2 = (1{,}3 \,|\, 80°)$.

Lösung:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{0{,}8}{1{,}3} \middle\vert 50° - 80°\right) = (0{,}62 \,|\, -30°) = (0{,}62 \,|\, 330°)$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \left(\frac{1{,}3}{0{,}8} \middle\vert 80° - 50°\right) = (1{,}63 \,|\, 30°)$$



3 Berechne (1) $\frac{z_1}{z_2}$, (2) $\frac{z_2}{z_1}$ der komplexen Zahlen $z_1 = (2 \,|\, 65°)$ und $z_2 = (5 \,|\, 135°)$.

Regeln für das Multiplizieren und Dividieren komplexer Zahlen in Polardarstellung

Für $z_1 = (r_1 \,|\, \varphi_1) = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$ und $z_2 = (r_2 \,|\, \varphi_2) = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$ gilt:

Multiplikation $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2 \,|\, \varphi_1 + \varphi_2) = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Division $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \middle\vert \varphi_1 - \varphi_2\right) = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Technologietipp: Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren komplexer Zahlen

Aufgaben

4 Wandle die komplexen Zahlen z_1 und z_2 in Polarform um und berechne das Produkt.
a) $z_1 = -3 + 3i$; $z_2 = 5 - 2i$
b) $z_1 = -1 - 4i$; $z_2 = 3 + i$
c) $z_1 = 2 - i$; $z_2 = 4 + 3i$
d) $z_1 = 7 - 2i$; $z_2 = -7 + 2i$

5 Löse die vorige Aufgabe mit einem elektronischen Tool.

6 Wandle die komplexen Zahlen z_1 und z_2 in Polarform um und berechne (1) $\frac{z_1}{z_2}$, (2) $\frac{z_2}{z_1}$.
a) $z_1 = -3 + 3i$; $z_2 = 5 - 2i$
b) $z_1 = -1 - 4i$; $z_2 = 3 + i$
c) $z_1 = 2 - i$; $z_2 = 4 + 3i$
d) $z_1 = 7 - 2i$; $z_2 = -7 + 2i$

7 Löse die vorige Aufgabe mit einem elektronischen Tool.

8 Berechne (1) $z_1 \cdot z_2$, (2) $\frac{z_1}{z_2}$, (3) $\frac{z_2}{z_1}$.
Gib die Ergebnisse in der Form $a + b \cdot i$ und in Polarform an.
a) $z_1 = (9|112°)$; $z_2 = -10 - 4i$
b) $z_1 = (15|72°)$; $z_2 = 5 + 3i$
c) $z_1 = -7 + 2i$; $z_2 = (0{,}5|222°)$
d) $z_1 = 6{,}2 - i$; $z_2 = (1{,}5|320°)$

9 Löse grafisch und rechnerisch (1) $z_1 \cdot z_2$, (2) $\frac{z_1}{z_2}$, (3) $\frac{z_2}{z_1}$.
a) $z_1 = (4|70°)$; $z_2 = (1|35°)$
b) $z_1 = (2|160°)$; $z_2 = (0{,}5|200°)$
c) $z_1 = (2|80°)$; $z_2 = (3|170°)$
d) $z_1 = (3|30°)$; $z_2 = (1{,}5|260°)$

10 Wie lautet die Polardarstellung der komplexen Zahl, die bei der Drehung von z um den Koordinatenursprung (im mathematisch positiven Sinn) um den Winkel φ entsteht?
a) $z = (4 + 2i)$; $\varphi = 60°$
b) $z = (5 - 3i)$; $\varphi = 90°$
c) $z = (-6 + 2i)$; $\varphi = 120°$
d) $z = (-5 + 3i)$; $\varphi = 180°$

Multiplizieren und Dividieren komplexer Zahlen in Polardarstellung

Arbeitsblatt – Lösungen

1 (1) $z_1 = i = (1|90°)$, $z_2 = 1 + i = \left(\sqrt{2}|45°\right)$ (2) $z_3 = z_1 \cdot z_2 = -1 + i = \left(\sqrt{2}|135°\right)$
(3) Vermutete Regel: Radien werden multipliziert, Winkel addiert

2 (5|190°)

3 (1) (0,4|290°) (2) (2,5|70°)

4

	z_1	z_2	$z_1 \cdot z_2$
a)	(4,24|135°)	(5,39|338,2°)	(22,85|113,20°)
b)	(4,12|255,96°)	(3,16|18,43°)	(13,04|274,40°)
c)	(2,24|333,43°)	(5|36,87°)	(11,18|10,30°)
d)	(7,28|344,05°)	(7,28|164,05°)	(53|148,11°)

5 wie 4

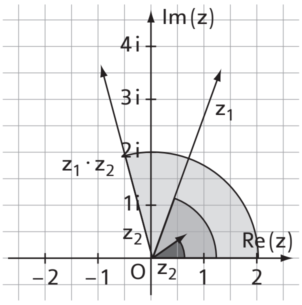
6

	z_1	z_2	$z_1 : z_2$	$z_2 : z_1$
a)	(4,24|135°)	(5,39|338,2°)	(0,79|156,80°)	(1,27|203,2°)
b)	(4,12|255,96°)	(3,16|18,43°)	(1,30|237,53°)	(0,77|122,47°)
c)	(2,24|333,43°)	(5|36,87°)	(0,45|296,57°)	(2,24|63,43°)
d)	(7,28|344,05°)	(7,28|164,05°)	(1|180°)	(1|180°)

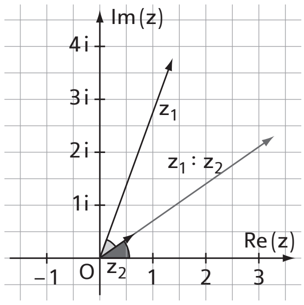
7 wie 6

8
a) $z_1 \cdot z_2 = (96{,}93|313{,}8°) = 67{,}09 - 69{,}96\,i$
$\frac{z_1}{z_2} = (0{,}84|270{,}2°) = (0{,}00 - 0{,}84\,i)$ $\frac{z_2}{z_1} = (1{,}2|89{,}8°) = (0{,}0 + 1{,}2\,i)$
b) $z_1 \cdot z_2 = (87{,}46|102{,}96°) = -19{,}62 + 85{,}24\,i$
$\frac{z_1}{z_2} = (2{,}57|41{,}04°) = (1{,}94 + 1{,}69\,i)$ $\frac{z_2}{z_1} = (0{,}39|318{,}96°) = (0{,}29 - 0{,}26\,i)$
c) $z_1 \cdot z_2 = (3{,}64|26{,}05°) = 3{,}27 + 1{,}6\,i$
$\frac{z_1}{z_2} = (14{,}56|302{,}05°) = (7{,}73 - 12{,}34\,i)$ $\frac{z_2}{z_1} = (0{,}07|57{,}95°) = (0{,}04 + 0{,}06\,i)$
d) $z_1 \cdot z_2 = (9{,}42|310{,}84°) = 6{,}16 - 7{,}13\,i$
$\frac{z_1}{z_2} = (4{,}19|30{,}84°) = 3{,}59 + 2{,}15\,i$ $\frac{z_2}{z_1} = (0{,}24|329{,}16°) = 0{,}21 - 0{,}12\,i$

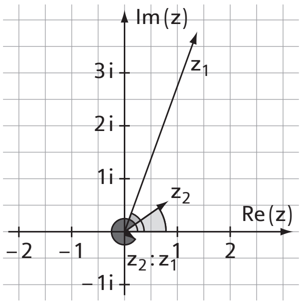
9 a) (1) (4 | 105°)



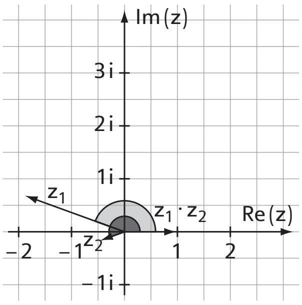
(2) (4 | 35°)



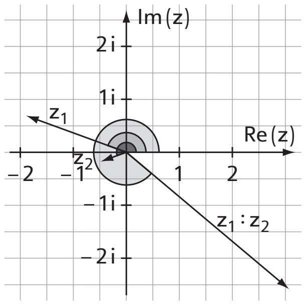
(3) (0,25 | 325°)



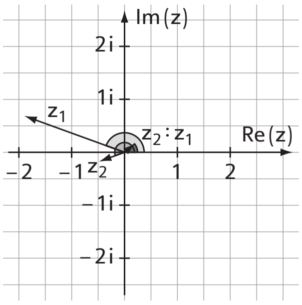
b) (1) (1 | 360°)



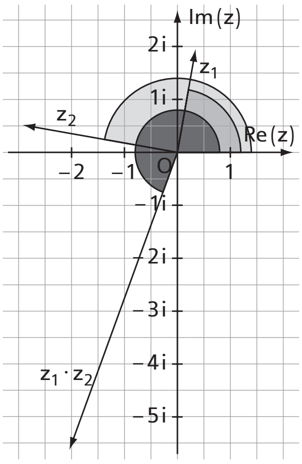
(2) (4 | 320°)



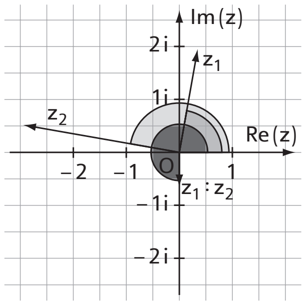
(3) (0,25 | 40°)



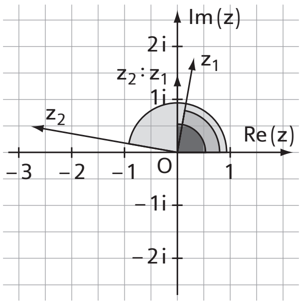
c) (1) (6 | 250°)



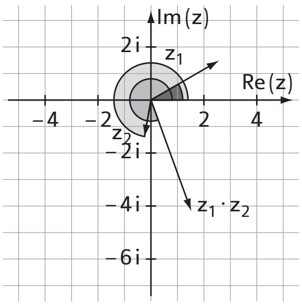
(2) (0,67 | 270°)



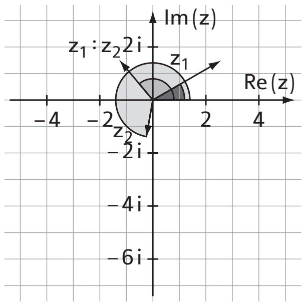
(3) (1,5 | 90°)



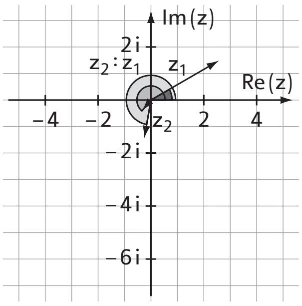
d) (1) (4,5 | 290°)



(2) (2 | 130°)



(3) (0,5 | 230°)



10 a) (4,47 | 86,57°) b) (5,83 | 59,04°) c) (6,32 | 281,57°) d) (5,83 | 329,03°)