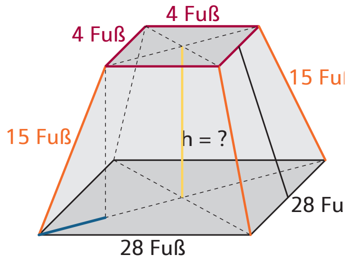
Historisches – Die Euler'sche Formel

Arbeitsblatt

Historisches – Die Euler'sche Formel

Girolamo Cardano war der Erste, der in einer wissenschaftlichen Arbeit mit Wurzeln von negativen Zahlen rechnete. Historisch gesehen, traten die komplexen Zahlen aber schon viel früher auf, wenn quadratische Gleichungen mit Diskriminanten kleiner als null zu lösen waren.

Heron (um 62 n. Chr.) versuchte die Höhe des abgebildeten quadratischen Pyramidenstumpfes zu berechnen. Beim Lösen der Aufgabe zeigt sich, dass der Pyramidenstumpf so nicht existieren kann, weil die orange Seitenkante kürzer als die blau eingezeichnete Projektion auf die Diagonale der Grundfläche ist. Für die Länge der gesuchten Höhe h ergibt sich in heutiger Schreibweise $\sqrt{225-288}$. Heron *löste* das Problem, indem er mit $\sqrt{288-225}$ rechnete, und täuschte so eine reelle Lösung vor, die nicht existiert.



Erst der indische Mathematiker **Mahavira** (um 580 n. Chr.) benannte die Schwierigkeiten der negativen Zahlen: „Es liegt in der Natur der Dinge, dass eine negative Größe nicht eine quadratische Größe ist und deshalb keine Quadratwurzel besitzt."[1]

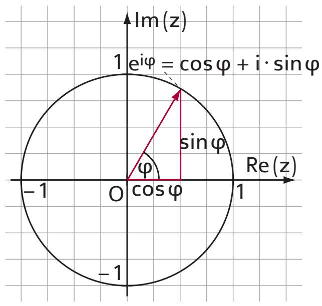
Im 15. Jahrhundert wurde dieses Problem von einigen europäischen Mathematikern aufgegriffen. **Albert Girard** formulierte den **Fundamentalsatz der Algebra** (mehr dazu in Abschnitt 6), wobei er auch komplexe Lösungen zuließ. Von **René Descartes** stammt die Bezeichnung *imaginär*. In der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts wurde bereits ganz zwanglos mit imaginären Zahlen gearbeitet, obwohl der Begriff erst im 19. Jahrhundert vollständig mathematisch geklärt wurde.

Leonhard Euler war es, der die Bezeichnung i für $\sqrt{-1}$ einführte.

Er war es auch, der 1748 die **Euler'sche Formel** (oder Euler'sche Identität) veröffentlichte.

Die **Euler'sche Identität** bezeichnet die Formel:

$$\mathbf{e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)}$$



Die Formel verbindet auf elegante Weise die trigonometrischen Funktionen (Sinus, Cosinus) mit der Euler'schen Zahl e und der imaginären Einheit i der komplexen Zahlen. Ihre Besonderheit wird noch deutlicher, wenn du für φ die Kreiszahl π einsetzt. Dann gilt:

$$\mathbf{e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1 + i \cdot 0}$$

$$e^{i\pi} = -1 \quad \textbf{oder} \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$

In dieser Form vereint die Euler'sche Identität die fünf wichtigsten Konstanten der Mathematik, nämlich die Zahlen 0, 1 und i sowie die Kreiszahl π und die transzendente Zahl e. Nicht nur das, diese besondere Identität enthält auch drei der wichtigsten mathematischen Operationen, die Addition, die Multiplikation und das Potenzieren.

Führt man nun die Euler'sche Identität mit der Polardarstellung komplexer Zahlen zusammen, dann ergibt sich $\mathbf{z = r \cdot e^{i\varphi}}$.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Polardarstellung:} & z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \\ \text{Euler'sche Identität:} & e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)\end{array}\right\} \; z = r \cdot e^{i\varphi}$$

1 Kaiser, Nöbauer: Geschichte der Mathematik (1998), S. 125.