Beweis des Erwartungswerts einer Binomialverteilung

Arbeitsblatt

Satz (Erwartungswert einer Binomialverteilung)
Für den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariablen X mit den Parametern n und p gilt:
$E(X) = \mu = n \cdot p$

Beweis

Um den Erwartungswert zu berechnen, musst du die Summe $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X=k)$ bilden.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p \cdot p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

$$= np \cdot \left[\binom{n-1}{0} p^0 (1-p)^{n-1} + \binom{n-1}{1} p^1 (1-p)^{n-2} + \ldots + \binom{n-1}{1} p^1 (1-p)^{n-2} + \binom{n-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^0 \right] \underbrace{=}_{\text{BinomischerLehrsatz}}$$

$$= np \cdot \left[(1-p) + p\right]^{n-1} = np \cdot [1]^{n-1} = np$$