Beweise zum Ableiten weiterer Funktionen

Arbeitsblatt A: Exponentialfunktionen

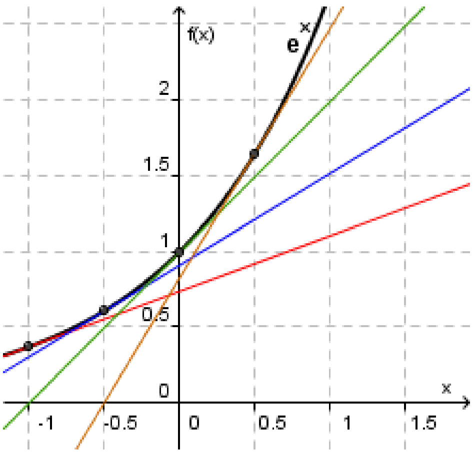
Satz (Ableitung von Exponentialfunktionen)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: (1) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

(2) $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$

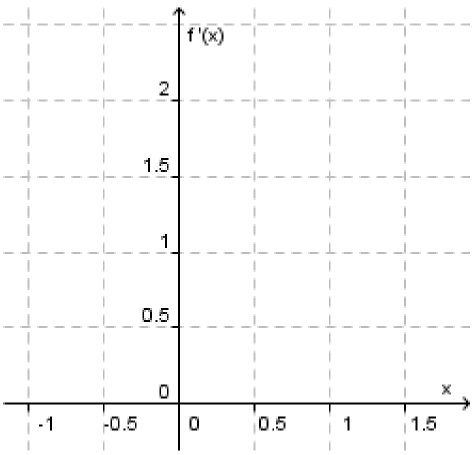
$f(x) = e^x$ grafisches Differenzieren:

Ergänze die Tabelle: Berechne an den angegebenen Stellen den Funktionswert oder lies ihn aus der Grafik ab. Zeichne für die jeweilige Tangente ein geeignetes Steigungsdreieck ein und lies den ungefähren Tangentenanstieg in der Grafik ab.



Stelle x	Funktionswert f (x)	Tangentenanstieg an der Stelle x f'(x)
−1		
−0,5		
0		
0,5		

Übertrage den ermittelten Wert für f' an der jeweiligen Stelle x in das leere Koordinatensystem und stelle die Ableitungsfunktion dar, indem du die einzelnen Punkte verbindest. Welche Funktion ergibt sich?



Beweis zu Regel (1):

Für den Beweis wird die Reihendarstellung von e^x benötigt.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Subtrahiere auf beiden Seiten 1.

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Dividiere beide Seiten durch x. Auf der rechten Seite erfolgt die Division für jeden Summanden.

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \ldots$$

Bilde den Grenzwert, wenn sich x unbegrenzt der Zahl 0 nähert.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \ldots\right)$$

Nähert sich x unbegrenzt der Zahl 0, dann nähert sich $\frac{e^x - 1}{x}$ der Zahl 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Für die weitere Beweisführung wird x durch Δx ersetzt.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

Bilde die Ableitung von e^x laut Definition mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

Nach den Regeln für das Rechnen mit Potenzen ergibt sich:

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^x \cdot \left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Die Ableitung kann für jede reelle Zahl x gebildet werden. x stellt eine feste Zahl dar und daher auch e^x. Es gilt der folgende Grenzwertsatz:
$\lim\limits_{n\to\infty} (k \cdot a_n) = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ für jede reelle Zahl k,
wobei in diesem Fall $k = e^x$ ist.

$$= e^x \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Wegen $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$ gilt:

$$= e^x \cdot 1$$

Daher stimmt die Ableitung von e^x mit der Funktion selbst überein.

$$f'(x) = e^x$$
$$f'(x) = f(x)$$

■

Beweis zu Regel (2):

Wende den Zusammenhang $a = e^{\ln(a)}$ an.

$$f(x) = a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x\cdot\ln(a)}$$

Leite mithilfe der Kettenregel ab.

$$f'(x) = e^{x\cdot\ln(a)} \cdot \ln(a)$$
$$= \left(e^{\ln(a)}\right)^x \cdot \ln(a)$$
$$= a^x \cdot \ln(a)$$

■

Beweise zum Ableiten weiterer Funktionen

Arbeitsblatt B: Logarithmusfunktionen

Satz (Ableitung von Logarithmusfunktionen)

Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt:

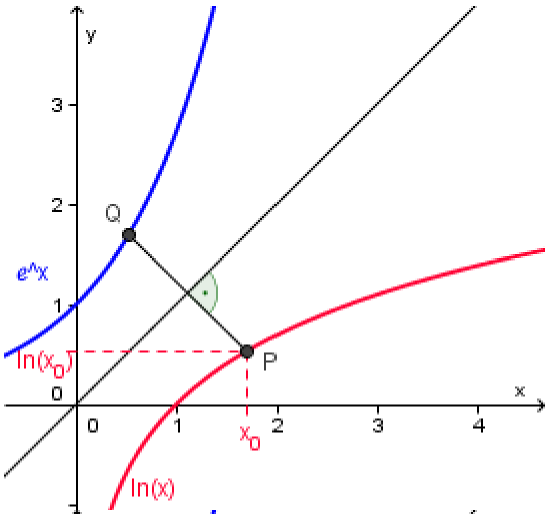
(1) $f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$

(2) $f(x) = {}^{a}\log(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$ mit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

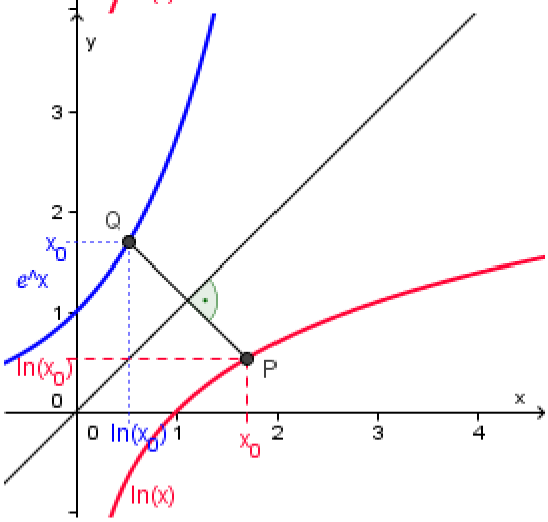
Beweis zu Regel (1):
Der Beweis wird mithilfe grafischer Überlegungen geführt.

Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ ist die Umkehrfunktion von $g(x) = e^x$. Grafisch erhältst du die Umkehrfunktion, indem du e^x an der 1. Mediane spiegelst.

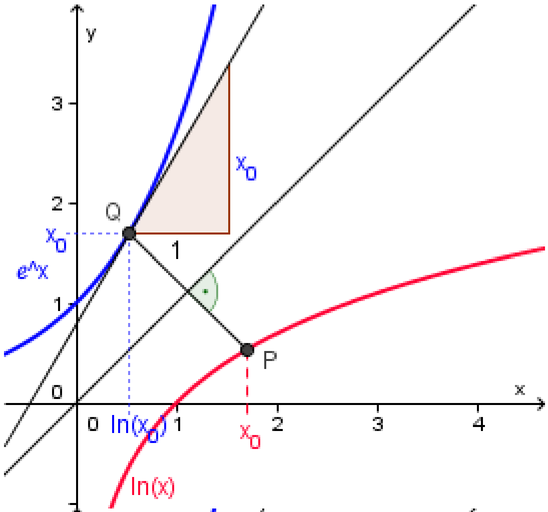
Für den Beweis wird eine beliebige Stelle x_0 betrachtet und der Funktionswert $\ln(x)$ gebildet. Der Punkt $P(x_0 \mid \ln(x_0))$ ist ein Punkt des Graphen von $\ln(x)$.
Da e^x die Umkehrfunktion von $\ln(x)$ ist, gibt es einen entsprechenden Punkt Q auf dem Graphen von e^x.



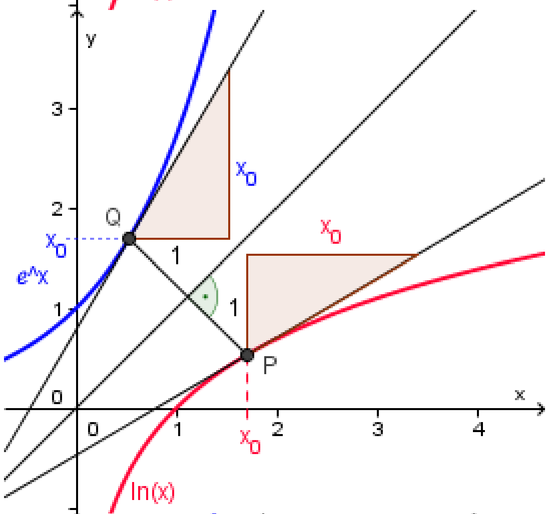
Der Punkt Q auf dem Graphen von e^x hat die Koordinaten $Q(\ln(x_0) \mid x_0)$.



Im Punkt Q wird eine Tangente an den Graphen gelegt und das entsprechende Steigungsdreieck eingezeichnet. Da $g(x) = e^x$ abgeleitet $g'(x) = e^x$ ist, gilt für die Steigung k der Tangente im Punkt Q: $k = g'(\ln(x_0)) = g(\ln(x_0)) = x_0$. Die Steigung der Tangente entspricht dem Funktionswert im Punkt Q.



Die Tangente im Punkt P liegt symmetrisch zur Tangente im Punkt Q bezüglich der 1. Mediane. Als Steigungsdreieck ergibt sich ebenfalls durch Spiegelung ein Dreieck mit der waagrechten Kathete der Länge x_0 und mit der senkrechten Kathete der Länge 1.

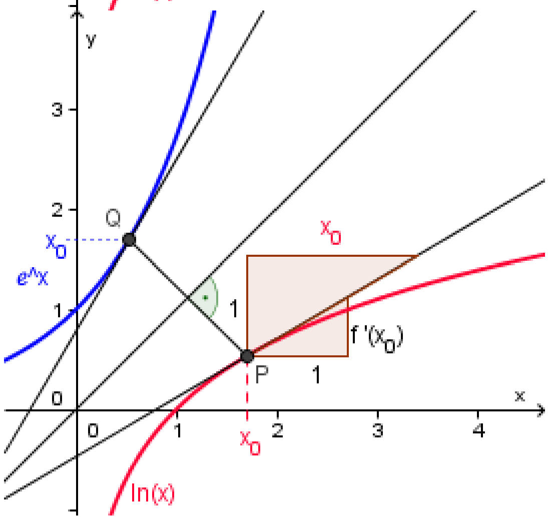


Das Steigungsdreieck mit den Kathetenlängen x_0 und 1 ist ähnlich zum Steigungsdreieck mit den Kathetenlängen 1 und $f'(x_0)$.
Es gilt:

$$f'(x_0) : 1 = 1 : x_0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

Daher gilt für jede positive reelle Zahl x:

$$f(x) = \ln(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \blacksquare$$



Beweis zu Regel (2):

Wende den Zusammenhang ${}^{a}\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ an.

$$f(x) = {}^{a}\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(x)$$

Leite ab.

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(a)} \qquad \blacksquare$$

Beweise zum Ableiten weiterer Funktionen

Arbeitsblatt C: Potenzfunktionen

Satz (Ableitung von Potenzen mit negativen Exponenten)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}^*$ gilt: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -n \cdot x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$

Beweis:

Die Regel wird mithilfe der Quotientenregel und den Regeln für das Rechnen mit Potenzen auf das Ableiten von Potenzen mit natürlichen Exponenten zurückgeführt.

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot n \cdot x^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{(n-1)-2n}$$

$$= -n \cdot x^{-n-1} = -n \cdot x^{-(n+1)} = -n \cdot \frac{1}{x^{n+1}} \qquad \blacksquare$$

Satz (Ableitung der Quadratwurzelfunktion)

Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt: $f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Beweis:

Die Regel wird mithilfe des Grenzwertes des Differenzenquotienten und der binomischen Formel $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ bewiesen.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \blacksquare$$

Mithilfe der Ableitung von e^x und $\ln(x)$ kann die Ableitung von Potenzen auf reelle Exponenten erweitert werden.

Satz (Ableitung von Potenzen mit reellen Exponenten)

Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = x^r \quad \Rightarrow \quad f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

Beweis:

Die Regel wird mithilfe des Zusammenhangs $x = e^{\ln(x)}$, mithilfe der Kettenregel und der Ableitungsregeln von e^x und $\ln(x)$ hergeleitet.

$$f(x) = x^r = (e^{\ln(x)})^r = e^{r \cdot \ln(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{r \cdot \ln(x)} \cdot r \cdot \frac{1}{x} = (e^{\ln(x)})^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = x^r \cdot r \cdot x^{-1} = r \cdot x^{r-1} \qquad \blacksquare$$

Beweise zum Ableiten weiterer Funktionen

Arbeitsblatt D: Winkelfunktionen

Satz (Ableitung von Winkelfunktionen)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: (1) $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$

(2) $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$

Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\}$ gilt: (3) $f(x) = \tan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

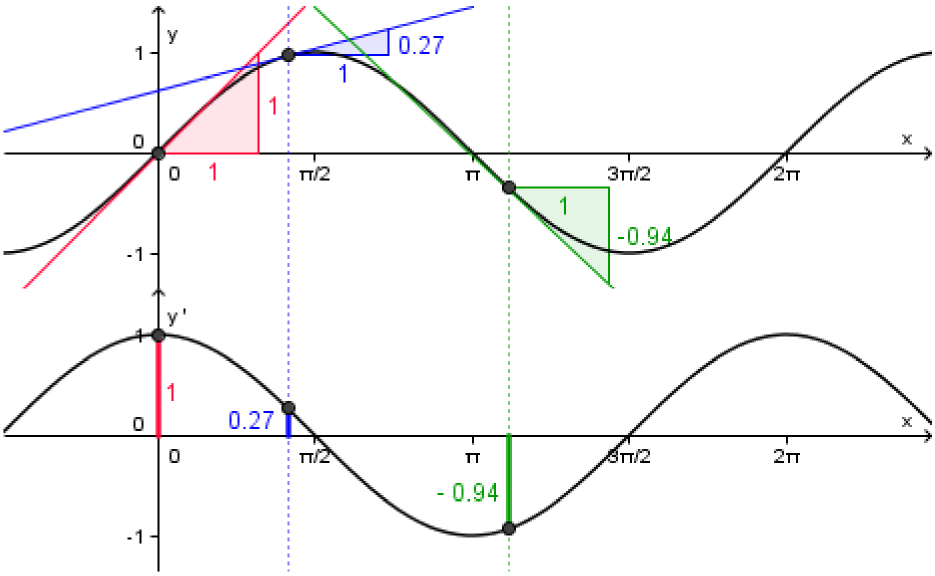
Beweis zu Regel (1):

Die Ableitung von Sinus und Cosinus lässt sich durch grafisches Differenzieren begründen. Überprüfe und begründe!

Ein exakter Beweis ist sehr aufwändig und wird hier nicht durchgeführt.

f(x) = sin(x)

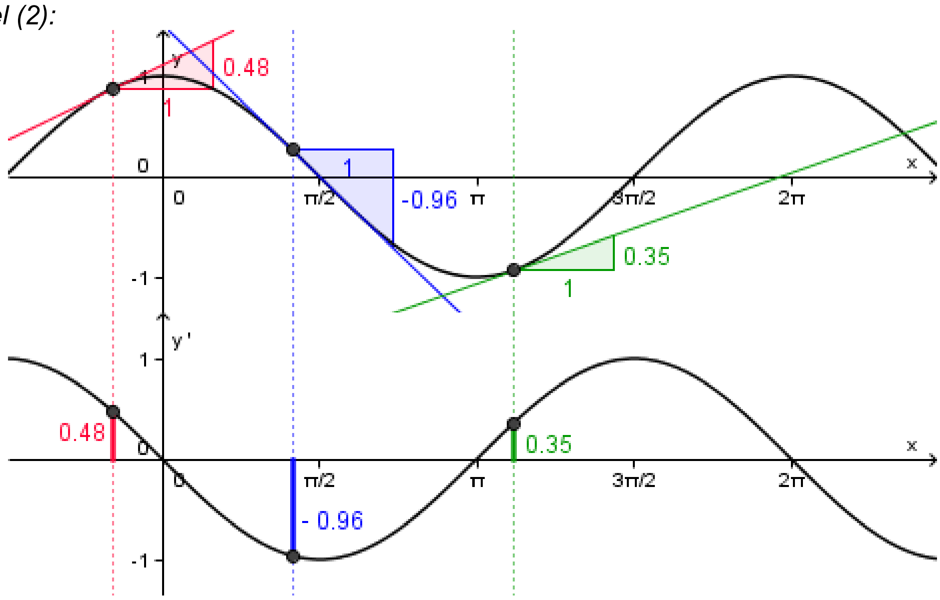
f'(x) = cos(x)



Beweis zu Regel (2):

f(x) = cos(x)

f'(x) = − sin(x)



Beweis zu Regel (3):

Die Regel kann mithilfe der Quotientenregel hergeleitet werden.

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot [-\sin(x)]}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)}$$

oder

$$= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$ ■