Beweis der Produktregel mithilfe des Grenzwertes

Arbeitsblatt

Gegeben ist die Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$.

Aufgrund des Differentialquotienten gilt: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}$.

Wird der Term $u(x) \cdot v(x+\Delta x)$ im Zähler addiert und subtrahiert, d. h. der Wert des ursprünglichen Ausdrucks nicht verändert, so erhältst du:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x+\Delta x) + u(x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$

Das Herausheben von $u(x + \Delta x) - u(x)$ in der ersten Differenz im Zähler sowie das Herausheben von $u(x)$ in der zweiten Differenz im Zähler liefert:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x+\Delta x) + u(x) \cdot \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right]$$

Gemäß der Definition des Differentialquotienten gilt nun:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x+\Delta x) + u(x) \cdot \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right] = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$