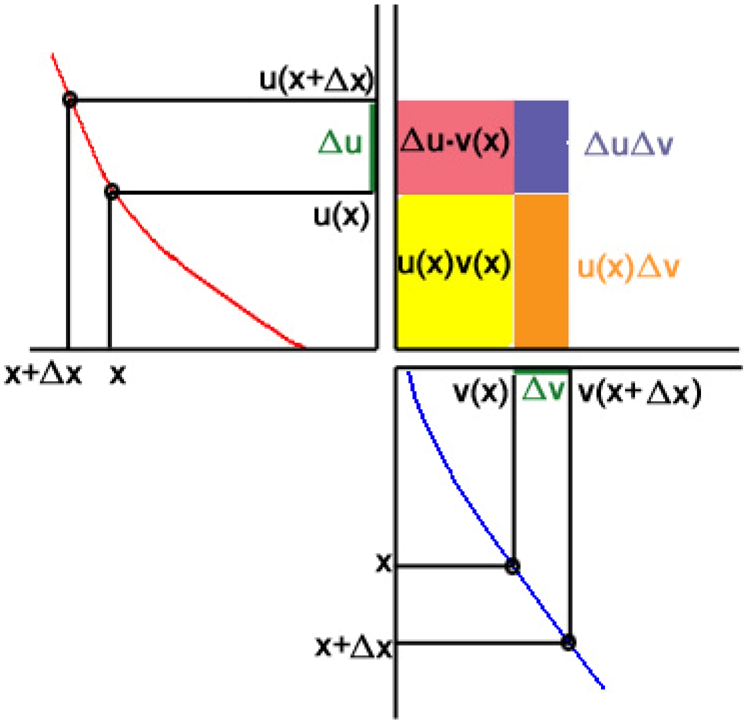
Produktregel − Ein geometrischer Beweis

Arbeitsblatt

Produktregel: Sind u und v in x_0 differenzierbar, dann ist auch $f = u \cdot v$ differenzierbar in x_0 und es gilt: $f' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Um die Produktregel zu zeigen, werden zwei Funktion u (x) und v (x), die differenzierbar sind, betrachtet. Dabei kann das Produkt der reellen Funktionen $u(x) \cdot v(x)$ als Flächeninhalt eines Quadrats mit den Seiten u und v gedeutet werden.

Ändert sich x um Δx, dann ändert sich u (x) um Δu, gleichzeitig ändert sich auch v (x) um Δv.
D. h. der Flächeninhalt $u \cdot v$ ändert sich um $\Delta(u \cdot v)$.



Die Änderung des Flächeninhalts wird durch die drei Flächen $\Delta u \cdot v(x)$, $u(x) \cdot \Delta v$ und $\Delta u \cdot \Delta v$ angezeigt.
Insgesamt gilt also: $\Delta(u \cdot v) = \Delta u \cdot v(x) + u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$.

Nun wird durch Δx dividiert. $\Rightarrow$ $\frac{\Delta(u \cdot v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u \cdot v(x) + u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}$

Geht nun $\Delta x \to 0$, so geht die Fläche $\Delta u \cdot \Delta v$ viel schneller gegen null als die beiden anderen Flächen $\Delta u \cdot v(x)$ und $u(x) \cdot \Delta v$.

D. h. $(u \cdot v)' = \Delta u \cdot v(x) + u(x) \cdot \Delta v = u' \cdot v + u \cdot v'$.