Ableitung der Tangensfunktion

Arbeitsblatt

Satz (Ableitung der Tangensfunktion)

Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots \right\}$ gilt: $f(x) = \tan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

Beispiel:
Gib die Definitionsmenge an und bilde die Ableitung.
(1) $f(x) = \tan(4x)$ (2) $f(x) = x \cdot \tan(x)$

Lösung:
(1) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \ldots, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \ldots \right\}$ $f'(x) = \frac{4}{\cos^2(4x)} = 4 \cdot \left(1 + \tan^2(4x)\right)$

(2) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots \right\}$

$f'(x) = 1 \cdot \tan(x) + x \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} = \tan(x) + x \cdot \left(1 + \tan^2(x)\right) = x + \tan(x) + x \cdot \tan^2(x)$

Aufgaben

1 Bilde die Ableitung von $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, indem du die Quotientenregel anwendest.

2 Gib die Definitionsmenge an und bilde die Ableitung.
a) $b(\beta) = 10 \cdot \tan(\beta)$ b) $f(\varphi) = \frac{1}{3} \cdot \tan(6\varphi)$ c) $f(\varphi) = \frac{\tan(\varphi)}{\varphi}$ d) $b(\alpha) = \frac{10}{\tan(\alpha)}$

3 Bilde die Ableitung.
a) $y(x) = \tan\left(\frac{1}{3}x\right)$ b) $f(\varphi) = 0{,}1 \cdot \tan(2\varphi)$ c) $f(\varphi) = \sqrt{\tan(2\varphi)}$

Ableitung der Tangensfunktion

Arbeitsblatt – Lösungen

1 $f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

2

a) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{..., -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, ...\right\}$, $b'(\beta) = 10 + 10 \cdot \tan^2(\beta)$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{..., -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, ...\right\}$, $f'(\varphi) = 2 + 2 \cdot \tan^2(6\varphi)$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{..., -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, ...\right\}$, $f'(\varphi) = \frac{\varphi - \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}{\varphi^2 \cdot \cos^2(\varphi)}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{..., -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, ...\right\}$ $b'(\alpha) = -\frac{10}{\sin^2(\alpha)}$

3

a) $y'(x) = \frac{1}{3 \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)^2}$

b) $f'(\varphi) = \frac{1}{5 \cdot (\cos(2\varphi))^2}$

c) $f'(\varphi) = \frac{1 + \tan^2(2\varphi)}{\sqrt{\tan(2\varphi)}}$