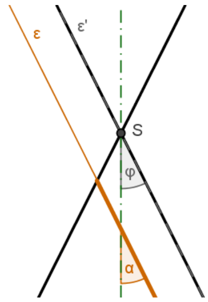
Ebener Schnitt eines Kegels nach einer Parabel

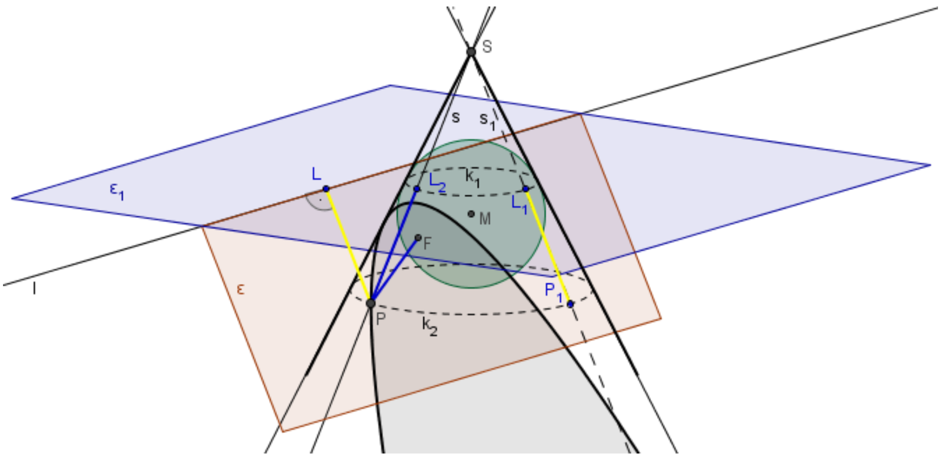
Arbeitsblatt

Gegeben ist eine Ebene ε, deren Neigungswinkel α (α < 90°) gleich dem (halben) Öffnungswinkel φ des Doppelkegels ist. Die Ebene ε darf außerdem nicht durch die Spitze S gehen.
In diesem Fall berührt eine zu ε parallele und durch die Spitze S gehende Ebene ε‘ den Kegel entlang einer Erzeugenden.



> **Satz**
> Die Schnittkurve des Kegels mit der Ebene ε ist eine Parabel.

Beweis mithilfe der Dandelin’schen Kugeln



Beachte, dass die Sichtbarkeit nicht in allen Bereichen korrekt dargestellt ist.

In den oberen Teil des Kegels wird eine Kugel eingeschrieben, die sowohl den Kegel als auch die Ebene ε berührt. Der Berührkreis zwischen der Kugel und dem Kegel ist der Kreis k_1, der Berührpunkt der Kugel mit der Ebene ε heißt F. Der Kreis k_1 liegt weiters in der Ebene ε_1, die sich mit der Ebene ε in der Gerade l schneidet.
P ist ein Punkt auf der Schnittkurve der Ebene ε mit dem Kegel.
Die Gerade s ist eine Erzeugende des Kegels und geht durch die Spitze S und durch den Punkt P. Der Schnittpunkt der Geraden s mit k_1 ist L_2.

Die Strecke PL berührt die Kugel, ebenso berührt die Strecke PF die Kugel. P ist deshalb gleich weit von L_2 wie von F entfernt.

$\overline{PL_2} = \overline{PF}$

Von P wird nun eine Normale zur Geraden l errichtet, die l im Punkt L schneidet. Weiters werden die Erzeugende s_1 des Kegels, die parallel zur Ebene ε liegt, und auf s_1 die Punkt P_1 und L_1 konstruiert.
Die Strecken PL und P_1L_1 sind parallel und gleich lang.

$\overline{PL} = \overline{P_1L_1}$

Die Strecke P_1L_1 auf der Erzeugenden s_1 und ist gleich lang wie die Strecke PL_2 auf s.

$\overline{P_1L_1} = \overline{PL_2}$

Die Länge der Strecke PL ist aber der Normalabstand von P zur Geraden l. Insgesamt folgt daraus

$\overline{PF} = \overline{Pl}$ (Definition einer Parabel)

Damit ist gezeigt, dass P auf einer Parabel mit dem Brennpunkt F und der Leitgeraden l liegt.