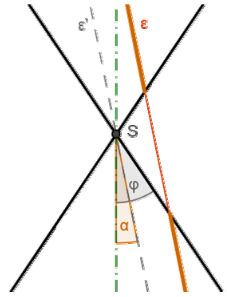
Ebener Schnitt eines Kegels nach einer Hyperbel

Arbeitsblatt

Gegeben ist eine Ebene ε, deren Neigungswinkel α ($\alpha < 90°$) kleiner als der (halbe) Öffnungswinkel φ des Doppelkegels ist.
In diesem Fall besteht der Schnitt einer zu ε parallelen und durch die Spitze S gehenden Ebene ε' mit dem Kegel aus einem Paar sich schneidender Erzeugenden.



Satz
Die Schnittkurve des Kegels mit der Ebene ε ist eine Hyperbel.

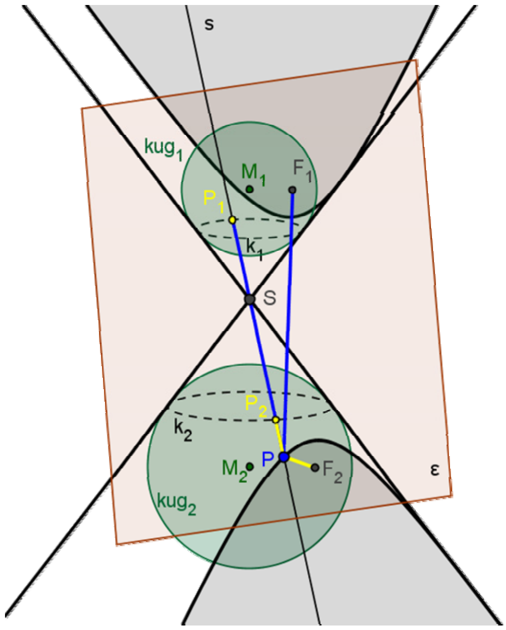
Beweis mithilfe der Dandelin'schen Kugeln

In den oberen Teil des Kegels wird eine Kugel kug_1 eingeschrieben, die sowohl den Kegel als auch die Ebene ε berührt. Der Berührkreis zwischen kug_1 und dem Kegel ist der Kreis k_1, der Berührpunkt von kug_1 mit der Ebene ε heißt F_1.
Analog wird in den unteren Teil des Kegels eine Kugel kug_2 eingeschrieben, die den Kegel entlang des Kreises k_2 und die Ebene ε im Punkt F_2 berührt.

P ist ein Punkt auf der Schnittkurve der Ebene ε mit dem Kegel.

Die Gerade s ist eine Erzeugende des Kegels und geht durch die Spitze S und durch den Punkt P. Die Schnittpunkte der Geraden s mit k_1 und k_2 sind P_1 und P_2.

Die Strecke PP_1 berührt die Kugel kug_1, ebenso berührt die Strecke PF_1 die Kugel kug_1. P ist deshalb gleich weit von P_1 wie von F_1 entfernt.



Beachte, dass die Sichtbarkeit nicht in allen Bereichen korrekt dargestellt ist.

$$\overline{PP_1} = \overline{PF_1}$$

Analog gilt für die Kugel kug_2, dass die Strecken PF_2 und PP_2 die Kugel berühren und dass P von P_2 gleich weit entfernt sein muss wie von F_2.

$$\overline{PP_2} = \overline{PF_2}$$

Da die Strecke P_1P_2 eine konstante Länge hat, gilt somit

$$\overline{PP_1} - \overline{PP_2} = \overline{P_1P_2} = \text{konstant} \quad \Rightarrow \quad \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \text{konstant} \ \text{(Definition einer Hyperbel)}$$

Damit ist gezeigt, dass P auf einer Hyperbel mit den Brennpunkten F_1 und F_2 liegt.