


Schnittwinkel zweier Kegelschnitte

Arbeitsblatt

 Der Schnittwinkel zwischen zwei Kegelschnitten berechnest du als Winkel zwischen den Tangenten (bzw. deren Normalvektoren).

► **Beispiel:**

Berechne die Schnittpunkte der Ellipse
 ell: $2x^2 + 3y^2 = 98$ und der Hyperbel
 hyp: $3x^2 - 4y^2 = 11$.
 Wie groß ist der Schnittwinkel zwischen Ellipse
 und Hyperbel?

Lösung:

ell \cap hyp:
 ell: $2x^2 + 3y^2 = 98$
 $\Rightarrow y^2 = \frac{98 - 2x^2}{3}$
 hyp: $3x^2 - 4 \cdot \frac{98 - 2x^2}{3} = 11$

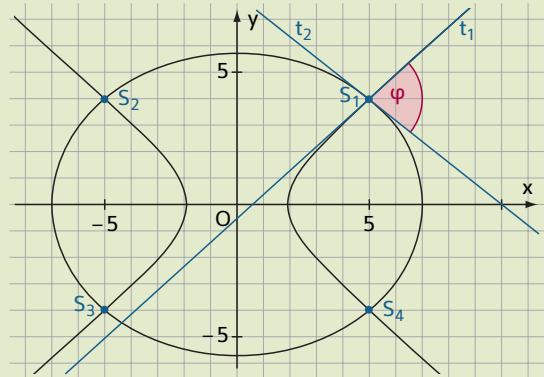
$x_1 = 5 \Rightarrow y_{1,2} = \pm 4 \Rightarrow S_1(5|4), S_4(5|-4)$
 $x_2 = -5 \Rightarrow y_{3,4} = \pm 4 \Rightarrow S_2(-5|4), S_3(-5|-4)$

Den Schnittwinkel zwischen den beiden Kurven berechnest du als Winkel zwischen den Tangenten (bzw. deren Normalvektoren).

Tangente t_1 an die Hyperbel in $S_1(5|4)$: $3 \cdot 5x - 4 \cdot 4y = 11 \Rightarrow \vec{n}_1 = (15|-16)$

Tangente t_2 an die Ellipse in $S_1(5|4)$: $2 \cdot 5x + 3 \cdot 4y = 98 \Rightarrow \vec{n}_2 = (10|12)$

$$\cos \varphi' = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\begin{pmatrix} 15 \\ -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}}{\sqrt{481} \cdot \sqrt{244}} \approx -0,1226 \Rightarrow \varphi' = 97,04^\circ \text{ bzw. } \varphi = 82,96^\circ$$



- 1 Berechne die Schnittpunkte und den Schnittwinkel zwischen den beiden Kegelschnitten.
 a) ell₁: $2x^2 + 5y^2 = 77$; ell₂: $3x^2 + 16y^2 = 192$ b) ell: $x^2 + 7y^2 = 32$; par: $y^2 = 2x$
 c) hyp: $32x^2 - 27y^2 = 180$; par: $y^2 = 6x$ d) hyp: $x^2 - 2y^2 = 7$; ell: $3x^2 + 8y^2 = 147$

Aufgaben

- 2 Berechne die Schnittpunkte und den Schnittwinkel von Kreis und Ellipse.
 a) k: $x^2 + y^2 = 25$; ell: $9x^2 + 20y^2 = 324$ b) k: $x^2 + y^2 = 13$; ell: $4x^2 + 27y^2 = 144$
- 3 Berechne die Schnittpunkte und den Schnittwinkel von Ellipse und Hyperbel.
 a) ell: $4x^2 + 13y^2 = 196$; hyp: $3x^2 - 11y^2 = 64$
 b) ell: $3x^2 + 11y^2 = 147$; hyp: $8x^2 - 7y^2 = 65$
- 4 Berechne die Schnittpunkte und den Schnittwinkel der gegebenen Kegelschnitte.
 a) ell: $9x^2 + 16y^2 = 225$; ell: $x^2 + 3y^2 = 36$ b) ell: $x^2 + 5y^2 = 36$; hyp: $x^2 - 3y^2 = 4$
 c) k: $x^2 + y^2 = 25$; ell: $16x^2 + 27y^2 = 576$ d) hyp: $3x^2 - 7y^2 = 12$; par: $y^2 = 1,8x$
 e) ell: $x^2 + 8y^2 = 36$; par: $y^2 = 2x$ f) k: $x^2 + y^2 = 13$; par: $y^2 = \frac{4}{3}x$

Schnittwinkel zweier Kegelschnitte

Arbeitsblatt – Lösungen

- 1 a) $S_1(4|3), S_2(-4|3), S_3(-4|-3), S_4(4|-3)$; $\varphi \approx 14,04^\circ$
 b) $S_1(2|2), S_2(2|-2)$; $\varphi \approx 34,70^\circ$
 c) $S_1(6|6), S_2(6|-6)$; $\varphi \approx 23,28^\circ$
 d) $S_1(5|3), S_2(-5|3), S_3(-5|-3), S_4(5|-3)$; $\varphi \approx 71,81^\circ$
- 2 a) $S_1(4|3), S_2(-4|3), S_3(-4|-3), S_4(4|-3)$, $\varphi \approx 22,17^\circ$
 b) $S_1(3|2), S_2(-3|2), S_3(-3|-2), S_4(3|-2)$, $\varphi \approx 43,78^\circ$
- 3 a) $S_1(6|2), S_2(-6|2), S_3(-6|-2), S_4(6|-2)$, $\varphi \approx 82^\circ$
 b) $S_1(4|3), S_2(-4|3), S_3(-4|-3), S_4(4|-3)$, $\varphi \approx 76,71^\circ$
- 4 a) $S_1(3|3), S_2(-3|3), S_3(-3|-3), S_4(3|-3)$, $\varphi \approx 10,92^\circ$
 b) $S_1(4|2), S_2(-4|2), S_3(-4|-2), S_4(4|-2)$, $\varphi \approx 55,49^\circ$
 c) $S_1(3|4), S_2(-3|4), S_3(-3|-4), S_4(3|-4)$, $\varphi \approx 12,91^\circ$
 d) $S_1(5|3), S_2(5|-3)$, $\varphi \approx 18,84^\circ$
 e) $S_1(2|2), S_2(2|-2)$, $\varphi \approx 33,69^\circ$
 f) $S_1(3|2), S_2(3|-2)$, $\varphi \approx 74,74^\circ$