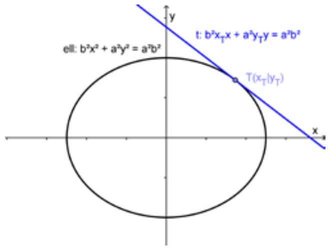
Tangentengleichungen von Kegelschnitten in Spaltform

Arbeitsblatt

Arbeite den Beweis für die Tangentengleichungen der Ellipse und Parabel schrittweise durch. Versuche für den Fall einer Hyperbel in 1. Hauptlage den Beweis selbst zu formulieren.

Satz:
Die Gerade $b^2x_T \cdot x + a^2y_T \cdot y = a^2b^2$ ist Tangente im Punkt $T(x_T|y_T)$ der Ellipse in 1. Hauptlage ell: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.



Beweis:
Im Beweis wird gezeigt, dass der Punkt $T(x_T|y_T)$ der einzige Schnittpunkt von Ellipse und Gerade ist. Somit muss T ein Berührpunkt der Ellipse sein und die Gerade muss eine Tangente der Ellipse sein.

Schneide die Ellipse und die Gerade:

Die Gleichung der Ellipse lautet $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Die Gleichung der Geraden lautet $b^2x_T \cdot x + a^2y_T \cdot y = a^2b^2$.

Aus der Geradengleichung folgt für x:

$$x = \frac{a^2 \cancel{b^2}}{\cancel{b^2} x_T} - \frac{a^2y_T}{b^2x_T}y = \frac{a^2}{x_T} - \frac{a^2y_T}{b^2x_T}y$$

Damit kannst du in die Gleichung der Ellipse einsetzen:

$$b^2\left(\frac{a^2}{x_T} - \frac{a^2y_T}{b^2x_T}y\right)^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Quadrieren

$$b^2\frac{a^4}{x_T^{\ 2}} - 2b^2\frac{a^2a^2y_T}{x_Tb^2x_T}y + b^2\frac{a^4y_T^{\ 2}}{b^4x_T^{\ 2}}y^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

und Vereinfachen ergibt

$$b^2\frac{a^4}{x_T^{\ 2}} - 2\frac{a^4y_T}{x_T^{\ 2}}y + \frac{a^4y_T^{\ 2}}{b^2x_T^{\ 2}}y^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Multipliziere die Gleichung mit x_T^2 und b^2

$$b^4a^4 - 2a^4b^2y_Ty + a^4y_T^{\ 2}y^2 + a^2b^2x_T^{\ 2}y^2 = a^2b^4x_T^{\ 2}$$

und dividiere durch a^2:

$$b^4a^2 - 2a^2b^2y_Ty + a^2y_T^{\ 2}y^2 + b^2x_T^{\ 2}y^2 = b^4x_T^{\ 2}$$

Ordne nach Potenzen von y:

$$\underbrace{\left(a^2y_T^{\ 2} + b^2x_T^{\ 2}\right)}_{a^2b^2}y^2 - 2a^2b^2y_T \cdot y + b^2\underbrace{\left(a^2b^2 - b^2x_T^{\ 2}\right)}_{a^2y_T^{\ 2}} = 0$$

Die beiden Klammerausdrücke können vereinfacht werden:

$$a^2b^2y^2 - 2a^2b^2y_T \cdot y + b^2a^2y_T^{\ 2} = 0$$

Dividiere durch a^2b^2.

$$y^2 - 2y_T \cdot y + y_T^{\ 2} = 0$$

Dieser Ausdruck ist ein vollständiges Quadrat

$$\left(y - y_T\right)^2 = 0$$

und die Lösung für y ist

$$y = y_T.$$

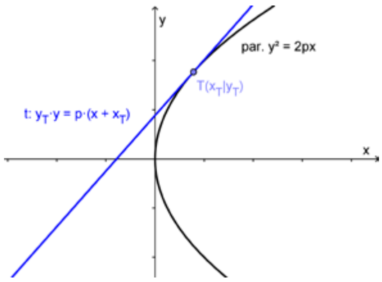
Die Lösung für x ergibt sich durch Einsetzen von y in die Geradengleichung:

$$b^2x_Tx + a^2y_Ty_T = a^2b^2$$

$$x = \frac{a^2b^2 - a^2y_T^{\ 2}}{b^2x_T} = \frac{b^2x_T^{\ 2}}{b^2x_T} = x_T$$

Der Schnittpunkt T von Ellipse und Gerade hat die Koordinaten $T(x_T|y_T)$.

Satz:
Die Gerade $y_T \cdot y = p \cdot (x + x_T)$ ist Tangente im Punkt $T(x_T|y_T)$ der Parabel in 1. Hauptlage par: $y^2 = 2px$.



Beweis:
Im Beweis wird gezeigt, dass der Punkt $T(x_T|y_T)$ der einzige Schnittpunkt von Parabel und Gerade ist. Somit muss T ein Berührpunkt der Parabel sein und die Gerade muss eine Tangente der Parabel sein.

Schneide die Parabel und die Gerade:

Die Gleichung der Parabel lautet $$y^2 = 2px$$

Die Gleichung der Geraden lautet $$y_T \cdot y = p \cdot (x + x_T)$$

Aus der Geradengleichung folgt für x: $$x = \frac{y_T \cdot y - p \cdot x_T}{p}$$

Damit kannst du in die Gleichung der Parabel einsetzen: $$y^2 = 2\cancel{p} \cdot \frac{y_T \cdot y - p \cdot x_T}{\cancel{p}} = 2y_T \cdot y - 2p \cdot x_T$$

Einsetzen $$y^2 = 2y_T \cdot y - \underbrace{2p \cdot x_T}_{y_T{}^2}$$

und Umformen ergibt $$y^2 - 2y_T \cdot y + y_T{}^2 = 0$$

Dieser Ausdruck ist ein vollständiges Quadrat $$(y - y_T)^2 = 0$$

und die Lösung für y ist $$y = y_T$$

Die Lösung für x ergibt sich durch Einsetzen von y in die Geradengleichung: $$x_T = \frac{y_T \cdot y_T - p \cdot x_T}{p} = \frac{2px_T - p \cdot x_T}{p} = \frac{\cancel{p} \cdot x_T}{\cancel{p}} = x_T$$

Der Schnittpunkt T von Parabel und Gerade hat die Koordinaten $T(x_T|y_T)$.

Zusammenfassung

Tangentengleichung im Punkt $T(x_T|y_T)$ eines Kegelschnitts

Ellipse: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$	Hyperbel: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$	Parabel: $y^2 = 2px$
Tangente: $b^2x_T \cdot x + a^2y_T \cdot y = a^2b^2$	Tangente: $b^2x_T \cdot x - a^2y_T \cdot y = a^2b^2$	Tangente: $y_T \cdot y = p \cdot (x + x_T)$