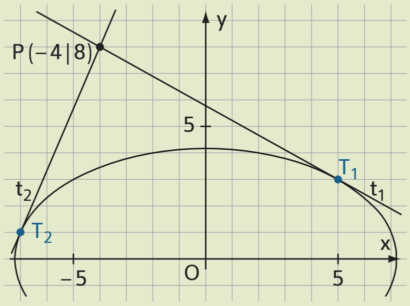
Tangenten an einen Kegelschnitt von einem Punkt P aus

Arbeitsblatt

In diesem Abschnitt lernst du, wie du die Gleichung einer Tangente an einen Kegelschnitt von einem Punkt aus ermittelst.

▷ *Beispiel:*
Lege vom Punkt $P(-4|8)$ aus die Tangenten an die Ellipse ell: $x^2 + 3y^2 = 52$ und bestimme die Koordinaten der Berührpunkte T_1 und T_2.



Lösung:

Berechne zuerst die Werte für a und b (bzw. a^2 und b^2) der Ellipse.	$\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{\frac{52}{3}} = 1 \Rightarrow a^2 = 52;\ b^2 = \frac{52}{3}$
$P(-4\|8)$ liegt auf den Tangenten t_1 und t_2.	$y = k \cdot x + d$ $8 = k \cdot (-4) + d \Rightarrow d = 8 + 4k$
Setze den Ausdruck für d und die Werte von a und b in die Berührbedingung ein. Löse die quadratische Gleichung.	$d^2 = a^2k^2 + b^2$ $(8 + 4k)^2 = 52k^2 + \frac{52}{3}$ $36k^2 - 64k - \frac{140}{3} = 0$
Berechne mit k_1 und k_2 die Werte für d_1 und d_2.	$k_1 = -\frac{5}{9} \Rightarrow d_1 = 8 + 4k_1 = \frac{52}{9}$ $k_2 = \frac{7}{3} \Rightarrow d_2 = 8 + 4k_2 = \frac{52}{3}$
Schreibe die Gleichungen der Tangenten an.	$t_1\colon y = -\frac{5}{9}x + \frac{52}{9}$ und $t_2\colon y = \frac{7}{3}x + \frac{52}{3}$
Für die Berechnung der Berührpunkte ermittle ell $\cap$ t_1 und ell $\cap$ t_2.	$x^2 + 3\left(-\frac{5}{9}x + \frac{52}{9}\right)^2 = 52 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow T_1(5\|3)$ $x^2 + 3\left(\frac{7}{3}x + \frac{52}{3}\right)^2 = 52 \Rightarrow x = -7 \Rightarrow T_2(-7\|1)$

Aufgaben

1 Lege vom Punkt P aus die Tangenten an den Kegelschnitt und berechne die Koordinaten der Berührpunkte.
a) $P(2{,}5|5)$; ell: $2x^2 + 3y^2 = 35$
b) $P(-1|-2)$; hyp: $x^2 - 2y^2 = 7$
c) $P(-4|-1)$; par: $y^2 = 2x$

2 Berechne die Gleichung der Tangenten vom Punkt P aus an die Ellipse. Bestimme auch die Koordinaten der Berührpunkte.
a) ell: $4x^2 + 9y^2 = 180$; $P(-3|6)$
b) ell: $x^2 + 4y^2 = 40$; $P(4|4)$
c) ell: $x^2 + 4y^2 = 80$; $P(4|-6)$
d) ell: $x^2 + 9y^2 = 45$; $P(-9|-1)$

3 Berechne die Gleichung der Tangenten vom Punkt P aus an die Hyperbel. Bestimme auch die Koordinaten der Berührpunkte.
a) hyp: $3x^2 - 4y^2 = 44$; $P(-2|-5)$
b) hyp: $4x^2 - 3y^2 = 52$; $P(-1|-6)$
c) hyp: $x^2 - 3y^2 = 13$; $P(-1|3)$
d) hyp: $x^2 - 2y^2 = 7$; $P(0|3{,}5)$

4 Berechne die Gleichung der Tangenten vom Punkt P aus an die Parabel. Bestimme auch die Koordinaten der Berührpunkte.
a) par: $y^2 = 4x$; $P(-2|1)$
b) par: $y^2 = 9x$; $P(-2|1{,}5)$
c) par: $y^2 = 0{,}5x$; $P(-4|0{,}5)$
d) par: $y^2 = 4x$; $P(-3|2)$

Tangenten an einen Kegelschnitt von einem Punkt P aus

Arbeitsblatt – Lösungen

1

a) t_1: $y = \frac{4}{9}x + \frac{35}{9}$ mit $T_1(-2|3)$; t_2: $y = -\frac{8}{3}x + \frac{35}{3}$ mit $T_2(4|1)$

b) t_1: $y = -1{,}5x - 3{,}5$ mit $T_1(-3|1)$; t_2: $y = \frac{5}{6}x - \frac{7}{6}$ mit $T_2(5|3)$

c) t_1: $y = 0{,}5x + 1$ mit $T_1(2|2)$; t_2: $y = -0{,}25x - 2$ mit $T_2(8|-4)$

2

a) t_1: $4x - 3y = -30$	$T_1(-6|2)$	t_2: $x + 3y = 15$	$T_2(3|4)$
b) t_1: $x - 6y = -20$	$T_1(-2|3)$	t_2: $3x + 2y = 20$	$T_2(6|1)$
c) t_1: $x + 4y = -20$	$T_1(-4|-4)$	t_2: $x - y = 10$	$T_2(8|-2)$
d) t_1: $-2x + 3y = 15$	$T_1(-6|1)$	t_2: $x + 6y = -15$	$T_2(-3|-2)$

3

a) t_1: $y = -3x - 11$	$T_1(-4|1)$	t_2: $y = 1{,}125x - 2{,}75$	$T_2(6|4)$
b) t_1: $y = -2{,}67x - 8{,}67$	$T_1(-4|2)$	t_2: $y = 1{,}67x - 4{,}33$	$T_2(5|4)$
c) t_1: $y = 1{,}33x + 4{,}33$	$T_1(-4|-1)$	t_2: $y = -0{,}83x + 2{,}17$	$T_2(5|-2)$
d) t_1: $y = 1{,}5x + 3{,}5$	$T_1(-3|-1)$	t_2: $y = -1{,}5x + 3{,}5$	$T_2(3|-1)$

4

a) t_1: $x - 2y = -4$	$T_1(4|4)$	t_2: $x + y = -1$	$T_2(1|-2)$
b) t_1: $y = 0{,}75x + 3$	$T_1(4|6)$	t_2: $y = -1{,}5x - 1{,}5$	$T_2(1|-3)$
c) t_1: $y = 0{,}125x + 1$	$T_1(8|2)$	t_2: $y = -0{,}25x - 0{,}5$	$T_2(2|-1)$
d) t_1: $y = 0{,}33x + 3$	$T_1(9|6)$	t_2: $y = -x - 1$	$T_2(1|-2)$