

Tangentialebene

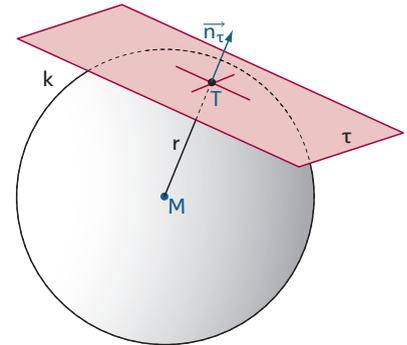
Arbeitsblatt

Tangentialebene einer Kugel

Eine Kugel besitzt in einem Punkt T nicht eine eindeutig definierte Tangente, sondern unendlich viele Tangenten, die jeweils normal zum Radius r sind. Alle diese Tangenten liegen in der sogenannten **Tangentialebene τ** .

Für die Tangentialebene τ ist der Vektor \overrightarrow{MT} ein Normalvektor und der Berührungspunkt T ein Punkt der Ebene.

Die Normalvektorform einer Ebene $\vec{n}_\tau \cdot X = \vec{n}_\tau \cdot T$ ergibt die Gleichung der Tangentialebene τ : $\overrightarrow{MT} \cdot X = \overrightarrow{MT} \cdot T$



► Beispiel:

Berechne die Gleichungen der Tangentialebene an die Kugel $k [(1 | -2 | 4); 6]$ im Punkt $T(5 | 2 | 6)$.

Lösung:

$\overrightarrow{MT} = (4 | 4 | 2)$ ist ein Normalvektor der Tangentialebene τ im Berührungspunkt T.

Ermittle mit $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot T$ die Gleichung der Tangentialebene.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \tau: 4x + 4y + 2z = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 6$$

$$\tau: 4x + 4y + 2z = 40$$

Analog zur Gleichung der Kreistangente kannst du die Gleichung der Tangentialebene folgendermaßen angeben:

► Spaltform

$$\overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{MX} = r^2 \quad \text{bzw.} \quad (T - M) \cdot (X - M) = r^2$$

Koordinatenform

$$(x_T - x_M) \cdot (x - x_M) + (y_T - y_M) \cdot (y - y_M) + (z_T - z_M) \cdot (z - z_M) = r^2$$

1 Berechne die Gleichung der Tangentialebene im Punkt T an die Kugel k.

- a) $k[M(0|0|0); 3]$, $T(1|2|z_T > 0)$
 b) $k: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 9$, $T(x_T > 0 | 1 | 4)$

2 Berechne mithilfe der Spaltform die Gleichung der Tangentialebene an die Kugel k im Berührungspunkt T.

- a) $k: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 81$; $T(7|6|-7)$
 b) $k[M(2|-2|5); 3]$; $T(0|-1|7)$

3 Gib die Gleichung der Tangentialebene an die Kugel k im Berührungspunkt T an.

- a) $k: x^2 + y^2 + z^2 = 81$; $T(4|7|z_T > 0)$
 b) $k: x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $T(0|0|z_T < 0)$
 c) $k[M(2|-1|5); 7]$; $T(5|y_T > 0|7)$
 d) $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 81$; $T(2|y_T < 0|5)$

Tangentialebene einer Kugel

Arbeitsblatt – Lösungen

- 1 a) $T(1|2|2); x + 2y + 2z = 9$ b) $T(2|1|4); x - 2y + 2z = 8$
- 2 a) $2x + y - 2z = 34$ b) $-2x + y + 2z = 13$
- 3 a) $4x + 7y + 4z = 81$
 b) $z = -2$
 c) $3x + 6y + 2z = 59$
 d) $2x + 2y - z = -5$
- 4 a) $\tau_1: 2x + 4y + 4z = 26; \tau_2: 2x + 4y + 4z = -46$
 b) $\tau_1: x + 2y + 2z = 9; \tau_2: x + 2y + 2z = -9$
- 5 a) $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 17, T(3|1|1)$
 b) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 11, T(4|0|-2)$
- 6 a) Berührung bei $r = 4$; Schnitt bei $r > 4$; kein gemeinsamer Punkt bei $r < 4$
 b) Berührung bei $r \approx 1,07$; Schnitt bei $r > 1,07$; kein gemeinsamer Punkt bei $r < 1,07$
- 7 a) $k[(6|1|4); \sqrt{34}]$
 b) $k[(1|1|5); \sqrt{29}]$
- 8 a) $M_1(9|11|8); M_2(-1|1|-2)$
 b) $M_1(3,4|3,4|3,4); M_2(-0,8|-0,8|-0,8)$
 c) $M_1(-1,8|-1,9|4,2); M_2(-2,4|4,4|0,2)$