Beweis zur Kreistangente

Arbeitsblatt

Satz:
Jede Kreistangente steht normal auf dem Berührradius $r = \left|\overrightarrow{MT}\right|$.

Beweis:
Da T auf k liegt, erfüllt T die Gleichung des Kreises $(T - M)^2 = r^2 \iff (T - M)^2 - r^2 = 0$
Eine Tangente t hat die Gleichung einer Geraden in Parameterform mit T als Punkt von t, s als Parameter und $\vec{a}$ als Richtungsvektor: $t: X = T + s \cdot \vec{a}$

Schneide den Kreis k mit der Tangente t:

$$k \cap t$$

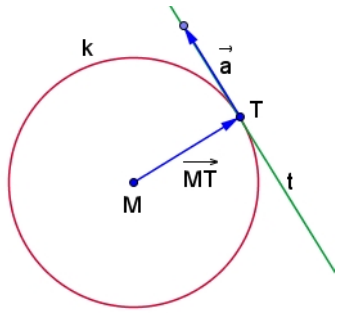
$$(X - M)^2 = r^2 \quad \cap \quad X = T + s \cdot \vec{a}$$

$$\left(T + s \cdot \vec{a} - M\right)^2 = r^2$$

$$\left(s \cdot \vec{a} + (T - M)\right)^2 = r^2$$

$$s^2 \cdot \vec{a}^{\,2} + 2s \cdot \vec{a} \cdot (T - M) + (T - M)^2 = r^2$$

$$s^2 \cdot \vec{a}^{\,2} + 2s \cdot \vec{a} \cdot (T - M) + (T - M)^2 - r^2 = 0$$



Da $(T - M)^2 - r^2 = 0$ gilt, erhältst du eine quadratische Gleichung der Form $A \cdot s^2 + B \cdot s + C = 0$ mit der Lösungsformel $s_{1,2} = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$.

$$s^2 \cdot \underbrace{\vec{a}^{\,2}}_{A} + \underbrace{2 \cdot \vec{a} \cdot (T - M)}_{B} \cdot s + \underbrace{0}_{C} = 0$$

Tangente und Kreis haben nur einen einzigen gemeinsamen Punkt.
Für die Diskriminante gilt daher $B^2 - 4AC = 0$

$$(2 \cdot \vec{a} \cdot (T - M))^2 = 0 \iff 2 \cdot \vec{a} \cdot (T - M) = 0 \,|: 2$$

$$\vec{a} \cdot (T - M) = 0$$

Das Skalarprodukt des Richtungsvektors $\vec{a}$ und des Vektors $\overrightarrow{MT} = T - M$ ergibt null, die Tangente steht daher normal auf dem zugehörigen Berührradius $r = \left|\overrightarrow{MT}\right|$.