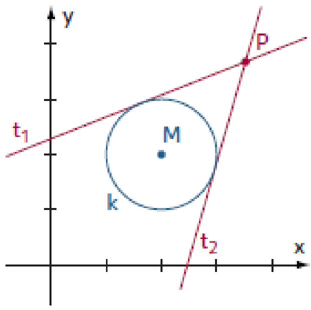
Tangenten aus einem Punkt P an einen Kreis

Arbeitsblatt

In der folgenden Gruppenarbeit lernst du Methoden für das Aufstellen der Tangente aus einem Punkt P außerhalb der Kreislinie an einen Kreis k kennen.



Arbeit nach der Lernmethode Gruppenpuzzle

(bis Aufgabe 358)

Hinweise zur Vorgangsweise findest du unter www Lernmethode Gruppenpuzzle.

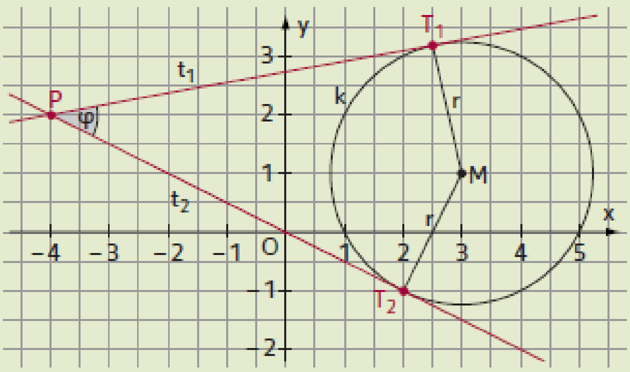
I. Arbeit in der Expertinnen- und Expertengruppe

Pro Gruppe wird ein Informationstext A oder B bearbeitet.

Informationstext A: Anwenden der Berührbedingung

Beispiel:
Ermittelt rechnerisch und konstruktiv die Gleichungen der Tangenten aus dem Punkt $P(-4|2)$ an den Kreis $k[(3|1); \sqrt{5}]$.

Lösung:
Wie ein Kreis und eine Gerade zueinander liegen, hängt
- vom Kreisradius r,
- der Geradensteigung k und
- dem Abszissenabschnitt d der Geraden ab.



Damit eine Gerade den Kreis berührt, muss die Berührbedingung gelten:
$(k \cdot x_M - y_M + d)^2 = r^2(k^2 + 1)$

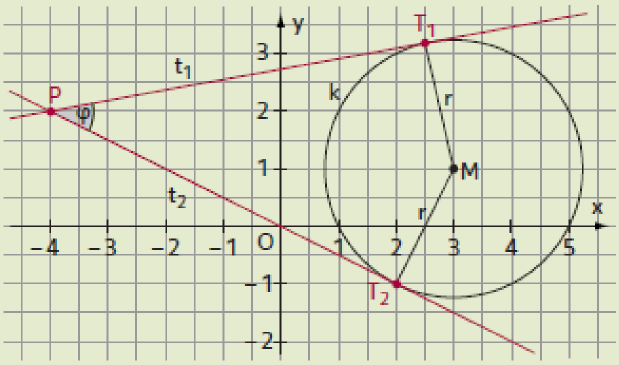
Stellt mithilfe der Berührbedingung ein Gleichungssystem auf.

Setzt r und M in die Berührbedingung ein.	I: $(3\cdot k - 1 + d)^2 = 5(k^2 + 1)$
Setzt die Koordinaten von P in $y = k\cdot x + d$ ein.	II: $2 = -4\cdot k + d$
Löst das Gleichungssystem.	I: $(3\cdot k - 1 + 2 + 4\cdot k)^2 = 5(k^2 + 1)$ $(7\cdot k + 1)^2 = 5\cdot k^2 + 5$ $49\cdot k^2 + 14\cdot k + 1 = 5k^2 + 5$ $44\cdot k^2 + 14\cdot k - 4 = 0$ $\Rightarrow k_1 = \frac{2}{11},\ k_2 = -\frac{1}{2}$
Setzt k_1 und k_2 in die zweite Gleichung ein, berechnet jeweils d und schreibt die beiden Tangentengleichungen an.	$d_1 = 2 + 4\cdot\frac{2}{11} = \frac{30}{11} \Rightarrow t_1\!: y = \frac{2}{11}\cdot x + \frac{30}{11}$ $d_2 = 2 - 4\cdot\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow t_2\!: y = -\frac{1}{2}\cdot x$

1 Ermittelt rechnerisch und konstruktiv die Gleichungen der Tangenten aus dem Punkt $P(3|2)$ an den Kreis $k[(-2|2); \sqrt{20}]$. Berechnet die Koordinaten der Berührpunkte T_1 und T_2 sowie den Schnittwinkel der Tangenten.
Tipp: Die Konstruktion der Tangenten erfolgt mithilfe des Thaleskreises.

Informationstext B: Anwenden der Abstandsformel

Beispiel:
Ermittelt rechnerisch und konstruktiv die Gleichungen der Tangenten aus dem Punkt $P(-4|2)$ an den Kreis $k[(3|1); \sqrt{5}]$.



Lösung:

Die Tangente hat vom Kreismittelpunkt den Abstand r.
Mithilfe der Abstandsformel $r = |\overrightarrow{PM}\cdot\vec{n}_0|$ könnt ihr die Gleichungen der Tangenten aufstellen.

Schreibt t in Normalvektorform an.	$t\!: y = k\cdot x + d \Rightarrow -k\cdot x + 1\cdot y = d$
Ermittelt $\vec{n}_0$ der Tangente.	$\vec{n} = \begin{pmatrix}-k\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\cdot\begin{pmatrix}-k\\1\end{pmatrix}$
Berechnet $\overrightarrow{PM}$.	$\overrightarrow{PM} = M - P = \begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$

Setzt r, $\overrightarrow{PM}$ und $\overrightarrow{n_0}$ in die Abstandsformel ein.	$r = \left\lvert \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{n_0} \right\rvert$
	$\sqrt{5} = \left\lvert \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \cdot \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert$
Quadriert die Betragsgleichung.	$\sqrt{5} = \left\lvert \frac{-7 \cdot k - 1}{\sqrt{k^2+1}} \right\rvert \; \vert^2$
	$5 = \frac{(-7 \cdot k - 1)^2}{(k^2+1)}$
Löst die quadratische Gleichung.	$5 \cdot (k^2+1) = 49 \cdot k^2 + 14 \cdot k + 1$ $44 \cdot k^2 + 14 \cdot k - 4 = 0$ $\Rightarrow k_1 = \frac{2}{11}, \quad k_2 = -\frac{1}{2}$
Setzt die Koordinaten von P sowie k_1 bzw. k_2 in die Gleichung $t: y = k \cdot x + d$ ein und berechnet jeweils d.	$t_1: 2 = \frac{2}{11} \cdot (-4) + d_1 \;\Rightarrow\; d_1 = \frac{30}{11}$ $t_2: 2 = -\frac{1}{2} \cdot (-4) + d_2 \;\Rightarrow\; d_2 = 0$
Schreibt die Gleichungen der Tangenten an.	$t_1: y = \frac{2}{11} \cdot x + \frac{30}{11}$ $t_2: y = -\frac{1}{2} \cdot x$

2 Ermittelt rechnerisch und konstruktiv die Gleichungen der Tangenten aus dem Punkt $P(7 \mid -4)$ an den Kreis $k\,[(-8 \mid 1); \sqrt{50}]$. Berechnet die Koordinaten der Berührpunkte T_1 und T_2 sowie den Schnittwinkel φ der Tangenten.
Tipp: Die Konstruktion der Tangenten erfolgt mithilfe des Thaleskreises.

II. Arbeit in Mischgruppen (bis Aufgabe 5)

Jede Gruppe besteht aus mindestens einer Expertin bzw. einem Experten der Gruppe A und B. Die Expertinnen und Experten fassen jeweils das Wesentliche für die anderen zusammen. Gemeinsam werden anschließend die folgenden Aufgaben gelöst.

3
(1) Ermittelt die Gleichungen der Tangenten, die vom Punkt $P(4 \mid 3)$ an den Kreis $k\,[(-4 \mid 1); 2]$ gelegt werden können.
(2) Berechnet die Koordinaten der Berührpunkte.
(3) Welchen Winkel schließen die Tangenten miteinander ein?

4 Ermittelt die Gleichungen der Tangenten an den Kreis $k\,[(-4 \mid -2); \sqrt{29}]$, die parallel zur Geraden $2x - 5y = 0$ sind.
Tipp: Parallele Geraden haben dieselbe Steigung.

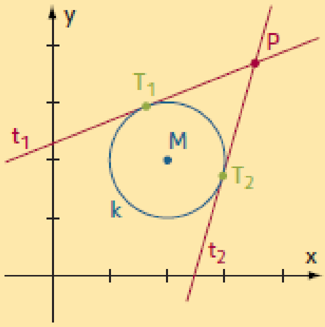
5 Ermittelt die Gleichungen der Tangenten an den Kreis k [(5|1); 4], die normal zur Geraden $5x + 6y = 15$ sind.

Zusammenfassung: Verfahren zur Ermittlung der Kreistangente von einem Punkt außerhalb des Kreises

Sind ein Kreis k und ein Punkt P, der außerhalb von k liegt, gegeben, dann können die Tangenten t_1 und t_2 an den Kreis mit folgenden Verfahren ermittelt werden:

- Anwenden der Berührbedingung
- Anwenden der Abstandformel

Die Berührpunkt T_1 und T_2 werden durch Schneiden der Tangenten mit dem Kreis ermittelt.



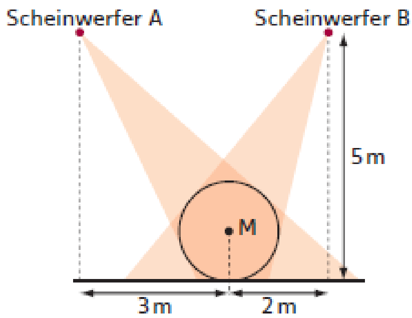
Aufgaben

6 Ermittle rechnerisch und konstruktiv die Gleichungen der Tangenten aus dem Punkt P an den Kreis k. Berechne die Koordinaten der Berührpunkte T_1 und T_2 sowie den Schnittwinkel der Tangenten.

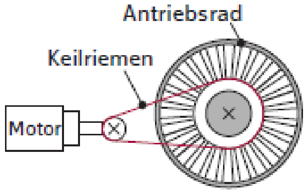
a) $P(4|3)$; k: $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 4$
b) $P(7|1)$; k: $x^2 + y^2 = 25$
c) $P(3|3)$; k: $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$
d) $P(3|2)$; k$[(4|-3); 5]$
e) $P(2|-3)$; k$[(-3|2); \sqrt{40}]$
f) $P(12|1)$; k: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$

Anwendungsaufgaben

7 Ein Kugelmonument mit dem Durchmesser $d = 2\,m$ wird von zwei Scheinwerfern beleuchtet. Berechne jeweils den Öffnungswinkel der Scheinwerfer. Entnimm die Abmessungen der Zeichnung.

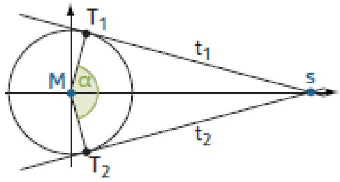


8 Keilriemengetriebe werden im allgemeinen Maschinenbau überall da eingesetzt, wo Drehzahlen konstant über- oder untersetzt werden müssen oder aber ein Achsabstand überbrückt werden muss. Berechne mit einem elektronischen Tool deiner Wahl die Länge eines Keilriemens, der zwei Antriebsräder mit 10 cm bzw. 30 cm Durchmesser umspannt und deren Mittelpunkte 50 cm voneinander entfernt sind.



Tipp: Lege die Mittelpunkte der Kreise in (0|0) und in (50|0). Ermittle mithilfe der Berührbedingung die gemeinsamen Tangenten der beiden Räder und berechne die Berührpunkte.

9 Auf Wikipedia[1] findet sich unter dem Suchbegriff *Satellitenorbit* folgender Text:



„Von besonderer Bedeutung ist auch die geostationäre Bahn in 35 800 km Höhe (24 h Umlaufzeit) mit Bahnneigung 0°. Satelliten in diesem Orbit stehen idealerweise fest über einem Punkt des Äquators, was insbesondere für Kommunikations- und Fernsehsatelliten von Vorteil ist, da die Antennen fest ausgerichtet werden können und eine permanente Sichtverbindung zum Satelliten besteht. Durch die Position über dem Äquator ist die Nutzung in den Polarregionen allerdings stark eingeschränkt oder gar nicht möglich."

Zeige, dass – wie im Text weiters angegeben – zur globalen Versorgung

a) mindestens 3 solcher Kommunikationssatelliten notwendig sind und
b) die Reichweite in den Polargebieten nur bis maximal 82° nördliche bzw. südliche Breite reicht. Lege dazu den Erdquerschnitt und die Satellitenposition auf geeignete Weise in ein Koordinatensystem. Der mittlere Erdradius beträgt $r = 6371$ km. Ermittle die Tangentengleichungen und den Winkel α und interpretiere das Ergebnis für beide Aufgabenstellungen. Mit welchen Lösungsmethoden lässt sich der Winkel α berechnen?

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Satellitenorbit (20.10.2010)