


Lösen linearer Gleichungssysteme höheren Grades

Arbeitsblatt

 Beim Lösen linearer Gleichungssysteme mit drei Variablen hast du das *Eliminationsverfahren* kennen gelernt. Diese Methode von **Carl Friedrich Gauß** kannst du auch bei vier, fünf oder mehr Variablen anwenden.

- Die systematische Vorgangsweise dieses Rechenverfahrens (Algorithmus) ermöglicht es, ein lineares Gleichungssystem beliebigen Grades zu lösen.
- Mithilfe einer Gleichung wird eine Variable in allen anderen Gleichungen eliminiert.
- Das Gleichungssystem wird auf *Diagonalform* gebracht.

Anmerkung: Alle Gleichungssysteme auf diesem Arbeitsblatt sind eindeutig lösbar.

► *Beispiel:*

Löse das lineare Gleichungssystem mit vier Variablen und vier Gleichungen.

Lösung:

Du eliminiert mithilfe der ersten Gleichung die Variable a in allen weiteren Gleichungen. Dazu multiplizierst du jeweils die beiden Gleichungen geeignet und addierst sie. Das umgeformte Gleichungssystem wird stets vollständig wieder angeschrieben. Auf gleiche Weise werden b, c und d eliminiert.

$a + b - c + d = 2 \quad \cdot 1 \quad \cdot 2 \quad \cdot 3$	Schreibe die 1. Gleichung an.
$a - 2b + c + 2d = 6 \quad \cdot (-1)$	Eliminiere die Variable a: Multipliziere die 2. Gleichung mit (-1) und addiere 1. und 2. Gleichung.
$2a - b + 2c - d = 2 \quad \cdot (-1)$	Multipliziere die 1. Gleichung mit 2, die 3. Gleichung mit (-1) und addiere die Gleichungen.
$3a + 2b - c + d = 4 \quad \cdot (-1)$	Multipliziere die 1. Gleichung mit 3, die 4. Gleichung mit (-1) und addiere die Gleichungen.
$a + b - c + d = 2$	Schreibe die 1. Gleichung unverändert an.
$3b - 2c - d = -4 \quad \cdot 1 \quad \cdot 1$	Schreibe die 2. Gleichung an.
$b - 4c + 3d = 2 \quad \cdot (-3)$	Eliminiere die Variable b: Multipliziere die 3. Gleichung mit (-3) und addiere 2. und 3. Gleichung.
$b - 2c + 2d = 2 \quad \cdot (-3)$	Multipliziere die 4. Gleichung mit (-3) und addiere 2. und 4. Gleichung.
$a + b - c + d = 2$	
$3b - 2c - d = -4$	
$10c - 10d = -10 \quad : 10$	Vereinfache die 3. Gleichung.
$4c - 7d = -10$	



$a + b - c + d = 2$ $3b - 2c - d = -4$ $c - d = -1 \quad \cdot 4$ $4c - 7d = -10 \quad \cdot (-1)$	<p>Schreibe die 1. Gleichung unverändert an.</p> <p>Schreibe die 2. Gleichung unverändert an.</p> <p>Schreibe die 3. Gleichung an. Eliminiere die Variable c: Multipliziere die 3. Gleichung mit 4, die 4. Gleichung mit (-1) und addiere die Gleichungen.</p>
$a + b - c + d = 2$ $3b - 2c - d = -4$ $c - d = -1$ $3d = 6$	<p>Das Gleichungssystem ist nun in Diagonalform angeschrieben. Im „Rückwärtsgang“ kannst du die Variablen ermitteln, indem du sie in der jeweils letzten Gleichung ausdrückst und in die Gleichung darüber einsetzt.</p>
$3d = 6 \Leftrightarrow d = 2$ $c - 2 = -1 \Leftrightarrow c = 1$ $3b - 2 - 2 = -4 \Leftrightarrow b = 0$ $a + 0 - 1 + 2 = 2 \Leftrightarrow a = 1$	<p>Drücke d aus.</p> <p>Setze d in die 3. Gleichung ein und drücke c aus.</p> <p>Setze c und d in die 2. Gleichung ein und drücke b aus.</p> <p>Setze b, c und d in die 1. Gleichung ein und drücke a aus.</p>

Die Lösung des Gleichungssystems lautet $(1 | 0 | 1 | 2)$.

Aufgaben

Löse das Gleichungssystem mit dem Eliminationsverfahren.

- | | | |
|---|---|---|
| 1 | a) $2a - b + c = 0$
$a + b + 3c = 5$
$3a + b - c = 15$ | b) $a - b - c = -4$
$5a + b + 3c = 0$
$3a + b + c = 8$ |
| 2 | a) $a + b - c - 2d = -1$
$a - b + 2c - d = 1$
$4a - 3b + c - d = 8$
$2a - b - c - d = 2$ | b) $a - b + 3c + 2d = 1$
$2a + b + d = 2$
$a - 3b + c + d = -5$
$3a - b + 2c + 2d = -1$ |
| 3 | a) $a + b - c + d - e = -1$
$a - 2b + c - d + e = 1$
$2a - b + c + d - e = 2$
$5a - b - c + d = 4$
$3a + 2b - 2c + d - e = 0$ | b) $2a - b - c + d + e = 0$
$a + b + 3c + 2d + 4e = 5$
$a - b - 2c - d - e = -1$
$2a + b + 4c + d + 2e = 2$
$3a - b + c + 5e = 0$ |

Lösen linearer Gleichungssysteme höheren Grades

Arbeitsblatt – Lösungen

1 a) $a=3$ $b=5$ $c=-1$

b) $a=1$ $b=10$ $c=-5$

2 a) $a=4$ $b=2$ $c=1$ $d=3$

b) $a=-1$ $b=2$ $c=0$ $d=2$

3 a) $a=1$ $b=2$ $c=3$ $d=4$ $e=5$

b) $a=2$ $b=8$ $c=-3$ $d=0$ $e=1$