Pegelstand bei Hochwasser – Kurvendiskussion

Arbeitsblatt

Die Funktion $p: x \mapsto p(x)$ mit $p(x) = 0{,}22x^4 - 3{,}9x^3 + 19x^2 + 180$ beschreibt im Intervall [0; 10] annähernd den Pegelstand einer Hochwasserentwicklung (x in Stunden, p in cm).
Die Funktion soll auf Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen untersucht und die Ergebnisse in Hinblick auf den Pegelstand gedeutet werden. Welche Meldungen könnten jeweils an die Bevölkerung weitergegeben werden?

Definitionsbereich

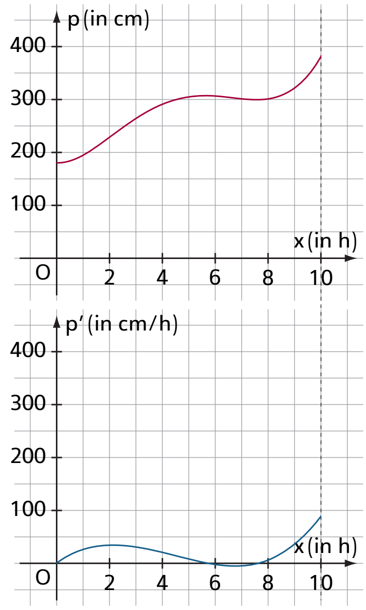
$D = [0; 10]$

Nullstellen

Welche Bedeutung haben die Nullstellen für den Pegelstand?

$0{,}22x^4 - 3{,}9x^3 + 19x^2 + 180 = 0$

Die Berechnung der Nullstellen liefert keine reellen Lösungen. Der Pegelstand sinkt nie auf 0 cm.



Extremstellen

Welche Bedeutung haben die Extremstellen im Intervall [0; 10] und die Extremwerte von p (x) für den Pegelstand?

$p'(x) = 0{,}88x^3 - 11{,}7x^2 + 38x$

$0{,}88x^3 - 11{,}7x^2 + 38x = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 \approx 5{,}6$ bzw. $x_3 \approx 7{,}7$

$p''(x) = 2{,}64x^2 - 23{,}4x + 38$

$p''(0) = 38 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$ ist eine lokale Minimumstelle.

$p''(5{,}6) = -10{,}2496 < 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 \approx 5{,}6$ ist eine lokale Maximumstelle.

$p''(7{,}7) = 14{,}3456 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 \approx 7{,}7$ ist eine lokale Minimumstelle.

Vergleiche mit den Funktionswerten am Rand des Intervalls zur Bestimmung des maximalen/minimalen Pegelstandes:

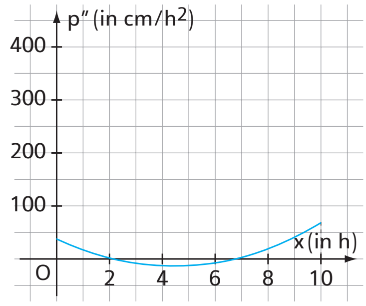
$p(0) = 180;\ p(5{,}6) \approx 307;\ p(7{,}7) \approx 299;\ p(10) = 380$

$\Rightarrow$ Bei $x_1 = 0$ tritt in [0; 10] das absolute Minimum auf, bei $x = 10$ das absolute Maximum.

Die Funktion p (x) hat bei $x_1 = 0$, $x_2 \approx 5{,}6$ und $x_3 \approx 7{,}7$ lokale Extremstellen.

Zu Beginn der Messung liegt für das Messintervall das absolute Minimum mit 180 cm Pegelstand vor. Nach etwa 5,6 Stunden erreicht der Pegelstand mit 307 cm einen vorläufigen Höchststand, um nach 7,7 Stunden geringfügig auf 299 cm abzusinken und nach 10 Stunden die vorläufige Höchstmarke von 380 cm zu erreichen.

Wendestellen



Welche Bedeutung haben die Wendestellen für den Pegelstand?

$p''(x) = 2{,}64\,x^2 - 23{,}4\,x + 38$

$2{,}64\,x^2 - 23{,}4\,x + 38 = 0$

$x_1 \approx 2{,}1$ und $x_2 \approx 6{,}7$

$p'''(x) = 5{,}28\,x - 23{,}4$

$p'''(2{,}1) \approx -12{,}3 \neq 0 \;\Rightarrow\;$ Wendestelle bei $x_1 \approx 2{,}1$

$p'''(6{,}7) \approx 12{,}0 \neq 0 \;\Rightarrow\;$ Wendestelle bei $x_2 \approx 6{,}7$

$p(2{,}1) \approx 232$ und $p(6{,}7) \approx 303$

Die Funktion $p(x)$ hat im Intervall $[0;\,10]$ Wendestellen bei $x_1 \approx 2{,}1$ und $x_2 \approx 6{,}7$.
Nach 2,1 Stunden hört man im Radio, dass der Pegelstand 232 cm erreicht hat, das Hochwasser zwar weiter steigt, die Zunahme sich aber verlangsamt und eine Entspannung in Sicht ist. Mit einem Absinken des Pegelstandes kann gerechnet werden.
Nach 6,7 Stunden warnt ein Experte, dass die Gefahr noch nicht vorüber ist: Der Pegelstand beträgt 303 cm, wird zwar vorläufig sinken, mit einem erneuten Anstieg ist aber zu rechnen.

Monotonieverhalten

Das Monotonieverhalten einer stetigen Funktion ändert sich in ihren Extremstellen. $p(x)$ hat im Intervall $[0;\,10]$ eine Maximumstelle bei $x_2 \approx 5{,}6$ und zwei Minimumstellen bei $x_1 = 0$ und $x_3 \approx 7{,}7$:
$p(0) = 180;\; p(5{,}6) \approx 307;\; p(7{,}7) \approx 299;\; p(10) = 380.$

- Im Intervall $[0;\,5{,}6]$ ist die Funktion streng monoton steigend. Es muss $p'(x) > 0$ sein für jedes $x \in \,]0;\,5{,}6[$.
  Nachweis der Monotonie:
  Da im Intervall $]0;\,5{,}6[$ keine Stelle mit $p'(x) = 0$ vorliegt und p stetig ist, genügt es zu zeigen, dass $p'(x_0) > 0$ für ein beliebiges x_0 aus dem Intervall $]0;\,5{,}6[$ gilt.
  $x_0 = 5 \;\Rightarrow\; p'(5) = 7{,}5 > 0 \;\Rightarrow\; p(x)$ ist in $[0;\,5{,}6]$ streng monoton steigend.
  Der Pegel des Hochwassers steigt.

- Im Intervall $[5{,}6;\,7{,}7]$ ist die Funktion streng monoton fallend. Es muss $p'(x) < 0$ sein für jedes $x \in \,]5{,}6;\,7{,}7[$.
  Nachweis der Monotonie:
  Da im Intervall $]5{,}6;\,7{,}7[$ keine Stelle mit $p'(x) = 0$ vorliegt und p stetig ist, genügt es zu zeigen, dass $p'(x_0) < 0$ für ein beliebiges x_0 aus dem Intervall $]5{,}6;\,7{,}7[$ gilt.
  $x_0 = 6 \;\Rightarrow\; p'(6) = -3{,}1 < 0 \;\Rightarrow\; p(x)$ ist in $[5{,}6;\,7{,}7]$ streng monoton fallend.
  Der Pegel des Hochwassers sinkt.

- Im Intervall $[7{,}7;\,10]$ ist die Funktion streng monoton steigend. Es muss $p'(x) > 0$ sein für jedes $x \in \,]7{,}7;\,10]$.
  Nachweis der Monotonie:
  Da im Intervall $]7{,}7;\,10]$ keine Stelle mit $p'(x) = 0$ vorliegt und p stetig ist, genügt es zu zeigen, dass $p'(x_0) > 0$ für ein beliebiges x_0 aus dem Intervall $]7{,}7;\,10]$ gilt.
  $x_0 = 8 \;\Rightarrow\; p'(8) = 5{,}8 > 0 \;\Rightarrow\; p(x)$ ist in $[7{,}7;\,10]$ streng monoton steigend.
  Der Pegel des Hochwassers steigt.