Extremwertaufgaben

Arbeitsblatt

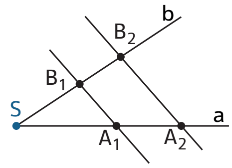
Aufgaben, in denen die Nebenbedingung mithilfe des Strahlensatzes ermittelt wird.

Vorwissen

1 Werden zwei Strahlen a und b mit dem gemeinsamen Anfangspunkt S von zwei parallelen Geraden geschnitten, so gilt der Strahlensatz.
Setze richtig ein.

$\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{\quad} : \overline{\quad}$ und $\overline{SA_1} : \overline{A_1A_2} = \overline{\quad} : \overline{\quad}$

$\overline{A_1B_1} : \overline{\quad} = \overline{SA_1} : \overline{\quad}$ oder $\overline{A_1B_1} : \overline{\quad} = \overline{SB_1} : \overline{\quad}$

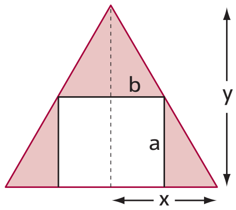


2 Setze richtig ein.

$x : y = (x - b) : \quad$

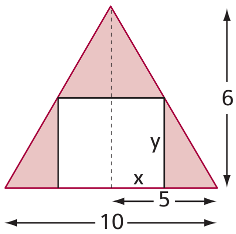
$x : b = \quad : \quad$

$b : (y - a) = \quad : \quad$



Aufgaben

3 Der Spitzdachboden eines Hauses soll ausgebaut werden. Die Querschnittsfläche des Dachbodens ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $c = 10\,m$ und der Höhe $h = 6\,m$. Die Querschnittsfläche des Ausbaus soll ein Rechteck sein. Wie müssen die Seitenlängen des Rechtecks gewählt werden, damit der Flächeninhalt maximal wird?

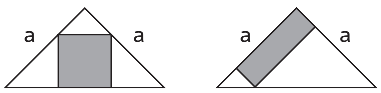


4 Einem Kegel mit dem Radius R und der Höhe H soll ein Zylinder mit möglichst großer Mantelfläche eingeschrieben werden. Berechne den Radius r und die Höhe h des Zylinders.

5 Einem gleichschenkligen Dreieck mit der Höhe $h = 6$ und der Basis $c = 8$ wird ein Rechteck von maximalem Flächeninhalt eingeschrieben. Eine Seite des Rechtecks soll auf der Basislinie des Dreiecks liegen. Berechne die Maße des Rechtecks.

6 Einem gleichschenkligen Trapez mit $a = 8$, $c = 5$ und $h = 3$ wird ein Rechteck mit größtem Flächeninhalt eingeschrieben. Eine Rechteckseite soll auf der Grundlinie a des Trapezes liegen.

7 Beim Zuschneiden von Pressspanplatten fallen größere Mengen von rechtwinkligen, gleichschenkligen Abfallstücken mit der Schenkellänge a an. Aus diesen sollen wieder möglichst große rechteckige Platten geschnitten werden. Dazu entwickeln die Werkstechniker zwei Modelle.



Berechne für beide Modelle, wie die rechteckigen Platten ausgeschnitten werden sollen, um den größtmöglichen Flächeninhalt zu erhalten.
Skizziere für jedes Modell den Graphen der Zielfunktion und zeichne die Stelle der gesuchten Lösung ein. Nimm dazu $a = 10$ an.

Aufgaben aus der Verpackungsindustrie

8 Minimale Oberfläche einer Getränkeverpackung

9 1 Liter Fruchtsaft soll mit möglichst geringem Materialverbrauch im Square-Format (Quader mit quadratischer Grundfläche) verpackt werden. Welche Maße soll diese Verpackung haben? Wie groß ist der Oberflächeninhalt?

10 Minimale Oberfläche einer Dose mit gegebenem Volumen

11 Eine zylinderförmige Dose für 500 ml Limonade wird entworfen. Dabei soll möglichst wenig Material verbraucht werden. Welche Maße (d, h) muss die Dose haben?

12 Maximales Volumen eines eingeschriebenen Zylinders

13 Einer Kugel vom Radius R wird ein gerader Drehzylinder von größtem Volumen eingeschrieben. Berechne die Maße des Drehzylinders.

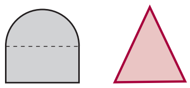
14 Einer Kugel vom Radius R wird ein gerader Drehkegel von größtem Volumen eingeschrieben. Berechne die Maße des Drehkegels.

Aufgaben mithilfe eines elektronischen Tools lösen

15 Für einen Torbogen ist der Umfang u vorgegeben. Wie müssen die Breite und die Gesamthöhe gewählt werden, damit der Durchgang (d. h. der Gesamtflächeninhalt) maximal ist?

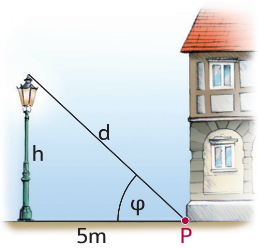
16 Ein Einmannzelt soll eine Querschnittsfläche von $A = 1\,m^2$ haben. Aus Materialgründen wird der kleinstmögliche Umfang der Querschnittsfläche angestrebt. Bestimme die Maße der Fläche, wenn diese die Form

a) eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis,
b) eines gleichschenkligen Dreiecks haben soll.

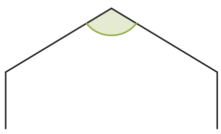


17 Ein kreisförmiges Stoffstück a) mit dem Radius $r = 10$, b) mit dem Radius r wird nach Herausschneiden eines Sektors zu einem kegelförmigen Lampenschirm zusammengebogen. Bei welchem Zentriwinkel α des Sektors hat der Schirm maximales Volumen?

18 Eine Straßenlaterne steht 5 m vor einem Haus. Der Punkt P am Boden wird je nach Höhe h der Laterne verschieden stark beleuchtet. Die Intensität I der Beleuchtung im Punkt P ist proportional zu $\sin\varphi$ und umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung d.
Es gilt: $I = k \cdot \frac{\sin\varphi}{d^2}$, k ist dabei eine von der Laterne abhängige Konstante.
In welcher Höhe h muss die Laterne montiert werden, damit die Beleuchtungsintensität im Punkt P maximal wird?



19 Für den Bau eines Tores stehen für die senkrechten Begrenzungen zwei Pfosten mit 2 m Länge und für die oben aufgesetzten schrägen Begrenzungen zwei Dachpfosten mit je 4 m Länge zur Verfügung. Wie muss der Öffnungswinkel der Dachpfosten gewählt werden, wenn das Tor eine möglichst große Durchlassfläche (Querschnittsfläche) haben soll?

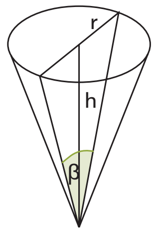


20 Zwei Orte A und B haben von einer (beinahe) geradlinig verlaufenden Autobahn die Abstände $\overline{AC} = a = 5\,km$ und $\overline{BD} = b = 7\,km$.
Das Autobahnstück zwischen den beiden Orten ist $\overline{CD} = c = 12\,km$ lang. Entlang der Strecke CD soll eine Autobahnauffahrt E so gebaut werden, dass die Gesamtentfernung $\overline{AE} + \overline{EB}$ der Orte A und B von E möglichst klein wird. Ermittle die Länge des Weges $\overline{AE} + \overline{EB}$.

21 Welcher Drehkegel mit gegebener Mantelfläche M hat das größte Volumen?

22 Welche gerade quadratische Pyramide hat bei gegebener Oberfläche O das größte Volumen?

23 Ein trichterförmiger, oben offener Behälter soll ein Volumen von 10 hl haben. Wie groß ist der Öffnungswinkel β zu wählen, damit die Materialkosten zur Herstellung des Behälters möglichst gering sind?
Anleitung: Berechne zunächst Radius und Höhe des Behälters und erst mithilfe von Radius und Höhe den Öffnungswinkel.



24 Das Volumen eines Salzstreuers in Form eines Zylinders mit aufgesetztem Kegel ist $20\,cm^3$. Die Kegelhöhe beträgt zwei Drittel des Basiskreisdurchmessers. Wie müssen die Abmessungen gewählt werden, damit die Oberfläche des Salzstreuers ein Minimum wird?

25 Ein Ball wird mit einer Wurfgeschwindigkeit $v = 20\,m/s$ unter einem Abwurfwinkel α und mit einer Abwurfhöhe h geworfen.
Seine Flugbahn wird durch die Funktion $f(x) = x \cdot \tan\alpha - \frac{g \cdot x^2}{2v^2 \cdot (\cos\alpha)^2} + h$ beschrieben, wobei x die horizontale und f(x) die vertikale Entfernung des Balles von der Abwurfstelle beschreibt. Die Erdbeschleunigung g beträgt $9{,}81\,m/s^2$. Für die Abwurfhöhe h kannst du hier null einsetzen.
(1) Zeichne mithilfe eines elektronischen Tools die Graphen der Flugbahn für $\alpha = 30°, 40°$ und $60°$ und lies jeweils ab, nach wie viel Meter der Ball am Boden aufschlägt.
(2) Ermittle eine Funktion w(α), die allgemein die Wurfweite w in Abhängigkeit vom Wurfwinkel α angibt. Setze $f(x) = 0$.
(3) Für welchen Winkel α wird die Wurfweite maximal?

Extremwertaufgaben

Arbeitsblatt – Lösungen

1 $\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$ und $\overline{SA_1} : \overline{A_1A_2} = \overline{SB_1} : \overline{B_1B_2}$
$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{SA_1} : \overline{SA_2}$ oder $\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$

2 $x : y = (x - b) : a$, $x : b = y : (y - a)$, $b : (y - a) = x : y$

3 $x = 2{,}5\,\text{m}$; $y = 3\,\text{m}$; $A = 15\,\text{m}^2$

4 $r = \frac{R}{2}$; $h = \frac{H}{2}$; $M = \frac{R \cdot H \cdot \pi}{2}$

5 $l = 4\,\text{cm}$; $b = 3\,\text{cm}$

6 $0 < x \leq 8$ und $0 < y \leq 3 \Rightarrow y = 3$ und $x = 5$; $A = 15$

7 Modell 1: Länge $= \frac{a\sqrt{2}}{2}$; Breite $= \frac{a\sqrt{2}}{4}$; $A = \frac{a^2}{4}$
Modell 2: Länge = Breite $= \frac{a}{2}$; $A = \frac{a^2}{4}$

8 www Minimale Oberfläche einer Getränkeverpackung

9 Würfel mit 10 cm Kantenlänge; $O = 600\,\text{cm}^2$

10 www Minimale Oberfläche einer Dose mit gegebenen Volumen

11 $r \approx 4{,}3\,\text{cm}$; $h \approx 8{,}6\,\text{cm}$; $O \approx 348{,}73\,\text{cm}^2$

12 www Maximales Volumen eines eingeschrieben Zylinders

13 $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$; $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

14 $r = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$; $h = \frac{4R}{3}$

15 $A = \frac{u^2}{2(\pi + 4)}$; $b = 2r = \frac{2u}{\pi + 4}$; $h = r = \frac{u}{\pi + 4}$

16 a) $r = 0{,}53\,\text{m}$; $h = 0{,}53\,\text{m}$; $u = 3{,}78\,\text{m}$
b) Gleichseitiges Dreieck mit $a = 1{,}52\,\text{m}$ und $u = 4{,}56\,\text{m}$

17 a) $\alpha = 293{,}94°$ b) $\alpha = 293{,}94°$

18 $h = 3{,}54\,\text{m}$

19 $\varphi = 120°$

20 Der Gesamtweg beträgt 16,97 km.

21 $r = 0{,}429\sqrt{M}$; $V = 0{,}117 \cdot M \cdot \sqrt{M}$

22 $a = \frac{\sqrt{O}}{2}$; $V = \frac{O \cdot \sqrt{2 \cdot O}}{24}$

23 $\beta = 70{,}53°$

24 $r = 2{,}88\,\text{dm}$; $h = 4{,}32\,\text{dm}$; $O = 156{,}3\,\text{dm}^2$

25 $w(\alpha) = 81{,}5494 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$; $\alpha = 45°$; Wurfweite $= 40{,}8\,\text{m}$