Trainingslauf – Kurvendiskussion

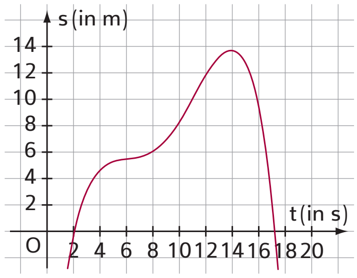
Arbeitsblatt

Ein Leichtathletiktrainer filmt 20 Sekunden lang eine Sprinterin, um aus den Videoaufzeichnungen ein Zeit-Ort-Diagramm zu erstellen. Für die Läuferin wird ein Trainings-Sprint durch die Zeit-Ort-Funktion $s: t \mapsto s(t)$ mit $s(t) = -0{,}006 \cdot t^4 + 0{,}208 \cdot t^3 - 2{,}46 \cdot t^2 + 12{,}35 \cdot t - 17{,}23$
(t in Sekunden, s in Meter) gut beschrieben. Die Läuferin startet dabei an der Startlinie und kehrt am Ende ihres Laufes wieder zur Startlinie zurück.
Untersuche die Funktion auf Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen und Monotonieverhalten und deute die Ergebnisse in Hinblick auf den Sprint.

Definitionsbereich
$D = [0; 20]$

Nullstellen
Welche Bedeutung haben die Nullstellen für den Lauf der Sprinterin? Gib einen praktisch sinnvollen Definitionsbereich an.

$s(t) = -0{,}006 \cdot t^4 + 0{,}208 \cdot t^3 - 2{,}46 \cdot t^2 + 12{,}35 \cdot t - 17{,}23$
$-0{,}006 \cdot t^4 + 0{,}208 \cdot t^3 - 2{,}46 \cdot t^2 + 12{,}35 \cdot t - 17{,}23 = 0$
$t_1 \approx 2{,}2$ bzw. $t_2 \approx 17{,}3$



Die Funktion $s(t)$ hat die reellen Nullstellen $t_1 \approx 2{,}2$ und $t_2 \approx 17{,}3$.

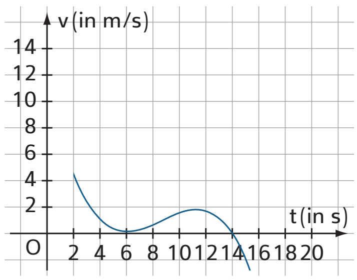
Eingrenzung des Definitionsbereiches
$D = [2{,}2; 17{,}3]$
Bevor die Läuferin startet, vergehen 2 Sekunden.
Bei t_1 beginnt ihr Lauf an der Startlinie und bei t_2 überquert sie wieder die Startlinie.

Extremstellen
Welche Bedeutung haben die Extremstellen und die Extremwerte von $s(t)$ für den Lauf der Sprinterin?

$v(t) = s'(t) = -0{,}024 \cdot t^3 + 0{,}624 \cdot t^2 - 4{,}92 \cdot t + 12{,}35$
$-0{,}024 \cdot t^3 + 0{,}624 \cdot t^2 - 4{,}92 \cdot t + 12{,}35 = 0$
$t \approx 13{,}9$

$s''(t) = -0{,}072 \cdot t^2 + 1{,}248 \cdot t - 4{,}92$
$s''(13{,}9) = -1{,}5 \Rightarrow$ lokales Maximum bei $t \approx 13{,}9$

$s(13{,}9) \approx 13{,}8$
$v(13{,}9) = s'(13{,}9) = 0$



Die Funktion $s(t)$ hat bei $t \approx 13{,}9$ eine lokale Maximumstelle.
Die Läuferin hat nach 13,9 Sekunden mit rund 13,8 m ihre maximale Entfernung von der Startlinie erreicht. Ihre Geschwindigkeit beträgt zu diesem Zeitpunkt 0 m/s. Sie bremst zu diesem Zeitpunkt ab und wendet.

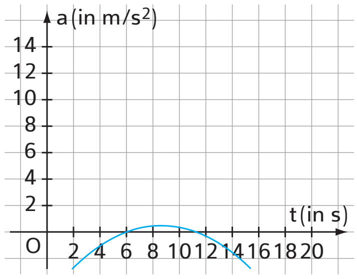
Wendestellen

Welche Bedeutung haben die Wendestellen für den Lauf der Sprinterin?

$a(t) = v'(t) = s''(t) = -0{,}072 \cdot t^2 + 1{,}248 \cdot t - 4{,}92$

$-0{,}072 \cdot t^2 + 1{,}248 \cdot t - 4{,}92 = 0$

$t_1 \approx 6{,}1$ bzw. $t_2 \approx 11{,}3$



$a'(t) = v''(t) = s'''(t) = -0{,}144\,t + 1{,}248$

$s'''(6{,}1) \approx 0{,}37 \neq 0 \quad \Rightarrow$ Wendestelle bei $t_1 \approx 6{,}1$

$s'''(11{,}3) \approx -0{,}38 \neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle bei $t_2 \approx 11{,}3$

$a(6{,}1) = v'(6{,}1) = 0$ und $a(11{,}3) = v'(11{,}3) = 0$

Vergleich mit der Geschwindigkeit am Rand des Intervalls zur Bestimmung der maximalen Geschwindigkeit:

$v(2{,}2) \approx 4{,}3;\; v(6{,}1) \approx 0{,}1;\; v(11{,}3) \approx 1{,}8;\; v(17{,}3) \approx -10{,}3$

Die Funktion s (t) hat bei $t_1 \approx 6{,}1$ bzw. $t_2 \approx 11{,}3$ Wendestellen.
Die Läuferin erreicht nach 6,1 Sekunden eine Geschwindigkeit von 0,1 m/s und nach 11,3 Sekunden eine Geschwindigkeit von 1,8 m/s. Diese Werte sind allerdings jeweils nur ein lokales Extremum für die Geschwindigkeit. Die höchste Geschwindigkeit erreicht die Sprinterin beim Zieleinlauf nach $t = 17{,}3$ s mit ca. 10,3 m/s. Das negative Vorzeichen von v (17,3) hängt mit der Richtungsänderung zusammen.
Zum Zeitpunkt $t_1 \approx 6{,}1$ bzw. $t_2 \approx 11{,}3$ beträgt die Beschleunigung 0 m/s².

Monotonieverhalten

Das Monotonieverhalten einer stetigen Funktion ändert sich in ihren Extremstellen. s (t) hat im Intervall [2,2; 17,3] eine Maximumstelle bei $t \approx 13{,}9$:
$s(2{,}2) = 0;\; s(13{,}9) \approx 13{,}8;\; s(17{,}3) = 0.$

- Im Intervall [2,2; 13,9] ist die Funktion streng monoton steigend. Es muss $s'(t) > 0$ sein für jedes $t \in [2{,}2;\, 13{,}9[$.
  Nachweis der Monotonie:
  Da im Intervall [2,2; 13,9[keine Stelle mit $s'(t) = 0$ vorliegt und s stetig ist, genügt es zu zeigen, dass $s'(t_0) > 0$ für ein beliebiges t_0 aus dem Intervall [2,2; 13,9[gilt.
  $t_0 = 5 \;\Rightarrow\; s'(5) = 0{,}35 > 0 \;\Rightarrow\; s(t)$ ist in [2,2; 13,9] streng monoton steigend.
  Die Entfernung der Läuferin von der Startlinie nimmt zu. Die Läuferin entfernt sich von der Startlinie.
- Im Intervall [13,9; 17,3] ist die Funktion streng monoton fallend. Es muss $s'(t) < 0$ sein für jedes $t \in]13{,}9;\, 17{,}3]$.
  Nachweis der Monotonie:
  Da im Intervall]13,9; 17,3] keine Stelle mit $s'(t) = 0$ vorliegt und s stetig ist, genügt es zu zeigen, dass $s'(t_0) < 0$ für ein beliebiges t_0 aus dem Intervall]13,9; 17,3] gilt.
  $t_0 = 15 \;\Rightarrow\; s'(15) = -2{,}1 < 0 \;\Rightarrow\; s(t)$ ist in [13,9; 17,3] streng monoton fallend.
  Die Entfernung der Läuferin von der Startlinie nimmt ab. Die Läuferin bewegt sich auf die Startlinie zu.