Abspalten eines Linearfaktors

Informationsblatt

Abspalten eines Linearfaktors

Satz:
Ist $p(x)$ ein Polynom n-ten Grades und x_1 eine Lösung der Gleichung $p(x) = 0$, so gilt:

$$\mathbf{p(x) = (x - x_1) \cdot p_1(x)}$$

Der Grad des Polynoms $p_1(x)$ ist $n - 1$.
Wenn x_1 eine Lösung der Gleichung $p(x) = 0$ ist, so kann das Polynom $p(x)$ vom Grad n immer durch den **Linearfaktor** $(\mathbf{x - x_1})$ ohne Rest dividiert werden.
Das Ergebnis ist ein Polynom $p_1(x)$ mit Grad $n - 1$.

Beweis
Angenommen, bei der Division $\frac{p(x)}{x - x_1}$ bliebe ein Rest r: $\frac{p(x)}{x - x_1} = p_1(x) + \frac{r}{x - x_1}$
Die Division des Polynoms $p(x)$ mit Grad n ergibt ein Polynom $p_1(x)$, dessen Grad um 1 kleiner ist, also $(n - 1)$-ten Grades.
Der Grad des Rests r muss kleiner als der Grad des linearen Ausdrucks $x - x_1$ sein. Da ein linearer Ausdruck den Grad 1 besitzt, muss r vom Grad 0 und deshalb eine Konstante sein.

Wenn du nun den Ansatz $\frac{p(x)}{x - x_1} = p_1(x) + \frac{r}{x - x_1}$
mit $(x - x_1)$ multiplizierst, erhältst du:

$$p(x) = (x - x_1) \cdot p_1(x) + r$$

Da x_1 laut Voraussetzung eine Lösung der Gleichung $p(x) = 0$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} p(x_1) = (x_1 - x_1) \cdot p_1(x_1) + r &= 0 \\ 0 \cdot p_1(x_1) + r &= 0 \\ r &= 0 \end{aligned}$$

Ein möglicher Rest muss null sein, und die Division $p(x) : (x - x_1)$ ist immer ohne Rest möglich. ■