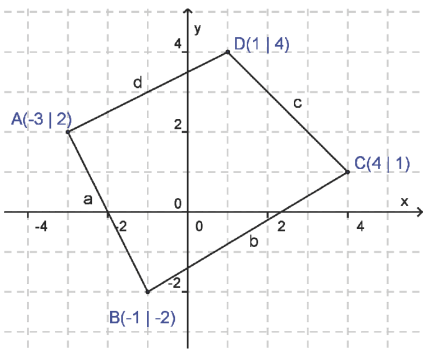
Analytische Geometrie des Raumes

Aufgaben zur Wiederholung

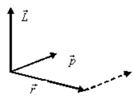
1 Berechne den Schwerpunkt des Dreiecks ABC mit A(−2|3|5), B(3|−1|0) und C(2|−5|1).
Wie weit ist der Schwerpunkt vom Eckpunkt A entfernt?
Welchen Winkel schließen die Seitenkanten beim Eckpunkt C ein?

2 Berechne den Flächeninhalt des Vierecks ABCD mit A(−3|2), B(−1|−2), C(4|1), D(1|4).



3 Ist der Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und zum Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ normal?
Wenn nicht, dann gib einen Vektor an, der sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ normal ist.

4 Berechne den Drehimpuls als Vektor und seinem Betrag nach, wenn eine Masse mit $m = 25\,\text{kg}$ eine Drehung mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ausführt.



5 Welche Geraden werden durch die jeweilige Parameterform angegeben?
Beschreibe ihre Lage mit Worten.

a) $g_1\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $g_2\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $g_3\colon X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6 Welche Lage nehmen die Geraden zueinander ein?

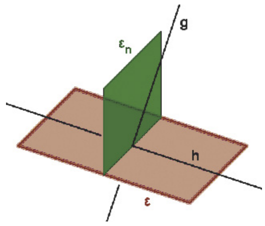
a) $g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $h\colon X = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix}$

b) $g\colon X = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h\colon X = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $h\colon X = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

7 Die Punkte P(2|−1|3), Q(0|2|−4) und R(1|1|−3) legen eine Ebene ε fest. Gib für diese Ebene eine parameterfreie Form und eine Parameterform an. Liegt der Punkt T(5|−2|3) ebenfalls in dieser Ebene?

8 An welcher Ebene ε muss A(−1|3|2) gespiegelt werden, damit der gespiegelte Punkt A′ die Koordinaten A′(11|1|2) besitzt?



9 Gegeben sind die Gerade $g: X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und die Ebene $\varepsilon: 2x + y + 6z = 21$.

a) Besitzen die Gerade und die Ebene einen Schnittpunkt? Wenn ja, berechne ihn.

b) Berechne jene Ebene ε_n, die auf ε normal steht und in der die Gerade g liegt.

c) Wie lautet die Gleichung der Geraden h, die in ε liegt und die normal zur Geraden g ist?

10 Ermittle die Lage der 3 Ebenen zueinander und berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt oder die Gleichung der Schnittgeraden.

a) $3x + 2y + 2z = -1$
$x + 6y - z = 3$
$4x + y + 5z = -6$

b) $x - 2y + 3z = 4$
$3x + y - 5z = 5$
$2x - 3y + 4z = 7$

c) ε_1 [A(2|1|0), B(6|4|0), C(5|2|1)]
$\varepsilon_2: X = (2|1|4) + s \cdot (3|1|1) + t \cdot (1|2|-1)$
$\varepsilon_3: 3x - 4y - 5z = 2$

11 Welche Lage haben die beiden Geraden zueinander? Berechne ihren Normalabstand.

a) $g: X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
$h: X = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

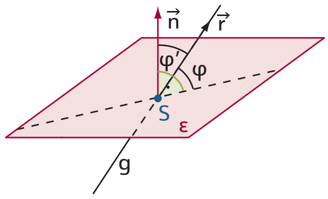
b) $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$
$h: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $g: X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$h: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgaben zur Vertiefung

Schnittwinkel

Der Schnittwinkel φ zwischen einer Geraden g und einer Ebene ε ist der Winkel zwischen g und der Normalprojektion von g auf ε.



Vorgangsweise:
- Ermittle den Winkel φ' zwischen einem Richtungsvektor $\vec{r}$ der Geraden und einem Normalvektor $\vec{n}$ der Ebene.
- Berechne die Differenz zwischen φ' und 90°.

▷ **Winkel φ zwischen Gerade und Ebene**

$$\varphi = \left|90° - \sphericalangle\left(\vec{r}, \vec{n}\right)\right| \quad \text{mit } 0° \le \varphi \le 90°$$

1 Berechnet den Winkel, unter dem die Gerade $g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ die Ebene ε schneidet.

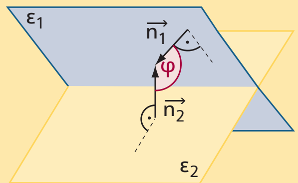
a) $\varepsilon\colon 2x - 5y - 3z = -29$

b) $\varepsilon\colon X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

2 Gegeben ist eine Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze S.
$A(3|2|1)$, $B(9|10|1)$, $C(-2|5|2)$ und $S(3|3|11)$.
a) Welchen Winkel schließen die Seitenkanten mit der Grundfläche der Pyramide ein?
b) Welchen Winkel schließt die Seitenfläche ABS mit der Grundfläche ein?

▷ **Winkel φ zwischen zwei Ebenen**

$$\varphi = \sphericalangle(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sphericalangle(\vec{n_1}, \vec{n_2})$$



3 Berechne den Winkel zwischen den beiden Ebenen.
a) $\varepsilon_1\colon 3x + y - z = 2$ und $\varepsilon_2\colon 2x - y + 2z = 6$
b) $\varepsilon_1\colon 3x + y - z = 2$ und $\varepsilon_2\colon 2x + z = -1$

4 Ein Stollensystem eines Bergwerks besteht aus vielen einzelnen Stollen, die miteinander verbunden sind. Geologen haben für einen Bergbaubetrieb die Vorgabe gemacht, dass zwischen zwei kreuzenden Stollen ein Mindestabstand von 10 Metern einzuhalten ist. Zu einem bestehenden geradlinigen Stollen, der durch
$g\colon X = (-3|-4|7) + t \cdot (1|5|3)$ beschrieben werden kann, wird ein neuer Stollen mit
$h\colon X = (5|6|-3) + s \cdot (-2|-3|1)$ geplant.
Wird in der Planung der Mindestabstand eingehalten?

5 Bei einem Viereck ABCD im Raum liegen die Punkte $A(-1|3|z_A)$ und $B(x_B|2|0)$ in der Ebene ε. Der Punkt $D(3|y_D|-2)$ liegt auf der Geraden g. Punkt C ist der Schnittpunkt der Geraden $g: X = (7|2|-10) + t \cdot (2|1|-4)$ mit der Ebene $\varepsilon: 7x - y + 9z = 26$.

a) Ermittle die fehlenden Koordinaten der Eckpunkte A, B, C und D.
b) Zeige, dass der Punkt D nicht in der Ebene ε liegt.
c) Berechne die Winkel, die die Seiten des Vierecks miteinander einschließen, sowie die Winkelsumme. Warum ist sie nicht 360°?
d) Berechne den Winkel, den die Gerade g mit der Ebene ε einschließt.

6 Gegeben ist eine dreiseitige Pyramide ABCD. Die Punkte A, B und C liegen in der Ebene ε. Die Geraden a, b und c sind Trägergeraden der Seitenkanten AD, BD und CD.
$\varepsilon: X = (1|2|1) + r \cdot (3|4|0) + s \cdot (2|-2|-1)$,
$a: X = (3|4|17) + t \cdot (1|1|8)$,
$b: X = (12|17|-7) + u \cdot (-5|-7|8)$,
$c: X = (17|-6|27) + v \cdot (5|-3|6)$

a) Bestimme die Koordinaten der Eckpunkte A, B, C und D.
b) Berechne die Körperhöhe h auf die Fläche ABC und das Volumen des Tetraeders.
c) Berechne die Winkel, die die Seitenkanten mit der Grundfläche einschließen.

7 Ein dreiseitiges Beschattungssegel wird im Punkt $A(1|2|0)$ am Boden verankert und liegt in der Ebene $\varepsilon: 34x + 2{,}5y - 33z = 39$. Die beiden anderen Eckpunkte B und C werden durch zwei schräg aus dem Boden ragende, gerade Masten abgespannt. Die Ausrichtung der Masten wird durch die beiden Geradengleichungen $g: X = (7|-1|10) + t \cdot (1|-1|5)$ und $h: X = (8|10|18) + u \cdot (1|1|4{,}5)$ beschrieben (Maße in m).

a) Berechne die Koordinaten der Punkte B und C. Wie hoch liegen die beiden Ecken?
b) Bestimme die Fußpunkte der Masten am Boden (xy-Ebene) sowie ihre Länge.
c) Welchen Flächeninhalt hat das Sonnensegel?