Lagebeziehungen von Geraden im Raum

Arbeitsblatt

Gruppe A − Schneidende Geraden

a) Jede Gruppe von Expertinnen und Experten bearbeitet eines der Beispiele A, B, C oder D.
b) Anschließend werden die Informationen in Mischgruppen ausgetauscht.
c) Entwerft in der Mischgruppe eine Übersicht, mit welchen Überlegungen die Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden im Raum möglichst rasch untersucht werden können. Haltet die Vorgangsweise auf einem Plakat fest.

Allgemeine Überlegungen:

- Die Richtungsvektoren der beiden Geraden geben einen Hinweis, ob die Geraden schneidend oder windschief bzw. parallel oder identisch sind.
- Anschließend wird das Gleichungssystem untersucht.
- Falls zwei Geraden einen Schnittpunkt besitzen, gibt es für jede Gerade einen eindeutigen Parameterwert, wobei die beiden Parameterwerte im Allgemeinen unterschiedlich sind. Außerdem müssen jeweils die x-, y- und z-Komponenten der beiden Gleichungen übereinstimmen.

Ermittle den Schnittpunkt der Geraden g_1: $X = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ und g_2: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schritt 1: Vergleiche die Richtungsvektoren.
Die Richtungsvektoren sind nicht parallel, daher sind die Geraden schneidend oder windschief.

$\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Schritt 2: Überprüfe, ob ein Schnittpunkt vorliegt.
Zur Berechnung des Schnittpunktes werden die zwei Gleichungen gleichgesetzt:

$X = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es ergeben sich drei Gleichungen mit zwei Variablen.

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & 12 + 8s & = & 1 - t \\ \text{(II)} & -7 - 5s & = & -8 - 2t \\ \text{(III)} & 8 + 5s & = & 6 + t \end{array}$$

Aus zwei beliebigen Gleichungen werden die beiden Parameter berechnet,
zum Beispiel aus (I) und (II).
Wende dazu ein bekanntes Lösungsverfahren an.

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & 12 + 8s & = & 1 - t \\ \text{(II)} & -7 - 5s & = & -8 - 2t \end{array}$$

Rechne nach:
$s = -1$ und $t = -3$

Die berechneten Werte für s und t erfüllen auch die dritte Gleichung. Das Gleichungssystem besitzt daher eine eindeutige Lösung, nämlich $s = -1$ und $t = -3$, und die beiden Geraden besitzen einen gemeinsamen Punkt.
Setzt du die berechneten Parameterwerte in die Geradengleichungen ein (s in g_1 oder t in g_2), erhältst du die Koordinaten des Schnittpunktes.

(III) $8 + 5\cdot(-1) = 6 + (-3)$
$3 = 3$
wahre Aussage

Einsetzen von $s = -1$ in g_1:

$$X = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die beiden Geraden schneiden einander im **Schnittpunkt (4 | −2 | 3)**.

Lagebeziehungen von Geraden im Raum

Arbeitsblatt

Gruppe B − Identische Geraden

a) Jede Gruppe von Expertinnen und Experten bearbeitet eines der Beispiele A, B, C oder D.
b) Anschließend werden die Informationen in Mischgruppen ausgetauscht.
c) Entwerft in der Mischgruppe eine Übersicht, mit welchen Überlegungen die Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden im Raum möglichst rasch untersucht werden können. Haltet die Vorgangsweise auf einem Plakat fest.

Allgemeine Überlegungen:

- Die Richtungsvektoren der beiden Geraden geben einen Hinweis, ob die Geraden schneidend oder windschief bzw. parallel oder identisch sind.
- Anschließend wird das Gleichungssystem untersucht.
- Falls zwei Geraden einen Schnittpunkt besitzen, gibt es für jede Gerade einen eindeutigen Parameterwert, wobei die beiden Parameterwerte im Allgemeinen unterschiedlich sind. Außerdem müssen jeweils die x-, y- und z-Komponenten der beiden Gleichungen übereinstimmen.

Zeige, dass die beiden Geraden g_2: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und g_3: $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ identisch sind.

Schritt 1: Vergleiche die Richtungsvektoren.
Die Richtungsvektoren sind parallel, daher sind die Geraden parallel oder identisch.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist Vielfaches von $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Schritt 2: Überprüfe die Lage der Geraden.
Die beiden Geraden sind identisch, wenn außerdem ein Punkt der Geraden g_3 auch auf der Geraden g_2 liegt.
Dazu wird z. B. der Punkt $(4\,|\,-2\,|\,3)$ in g_2 eingesetzt:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es ergeben sich drei Gleichungen mit einer Variablen.

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 4 = 1 - t \\ \text{(II)} & -2 = -8 - 2t \\ \text{(III)} & 3 = 6 + t \end{array}$$

Der Parameter t wird in den drei Gleichungen ermittelt.
Da sich für t stets der gleiche Wert ergibt, liegt der eingesetzte Punkt auf der Geraden g_2.

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & t = -3 \\ \text{(II)} & t = -3 \\ \text{(III)} & t = -3 \end{array}$$

Die beiden Geraden sind **identisch**.
Es gibt unendlich viele gemeinsame Punkte.

Lagebeziehungen von Geraden im Raum

Arbeitsblatt

Gruppe C − Windschiefe Geraden

a) Jede Gruppe von Expertinnen und Experten bearbeitet eines der Beispiele A, B, C oder D.
b) Anschließend werden die Informationen in Mischgruppen ausgetauscht.
c) Entwerft in der Mischgruppe eine Übersicht, mit welchen Überlegungen die Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden im Raum möglichst rasch untersucht werden können. Haltet die Vorgangsweise auf einem Plakat fest.

Allgemeine Überlegungen:

- Die Richtungsvektoren der beiden Geraden geben einen Hinweis, ob die Geraden schneidend oder windschief bzw. parallel oder identisch sind.
- Anschließend wird das Gleichungssystem untersucht.
- Falls zwei Geraden einen Schnittpunkt besitzen, gibt es für jede Gerade einen eindeutigen Parameterwert, wobei die beiden Parameterwerte im Allgemeinen unterschiedlich sind. Außerdem müssen jeweils die x-, y- und z-Komponenten der beiden Gleichungen übereinstimmen.

Zeige, dass die beiden Geraden g_1: $X = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ und g_4: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ windschief sind.

Schritt 1: Vergleiche die Richtungsvektoren.
Die Richtungsvektoren sind nicht parallel, daher sind die Geraden schneidend oder windschief.

$\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Schritt 2: Überprüfe, ob ein Schnittpunkt vorliegt.
Zur Berechnung des Schnittpunktes werden
$\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ gleichgesetzt.
Es ergeben sich drei Gleichungen mit zwei Variablen.

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 12 + 8s = 1 + r \\ \text{(II)} & -7 - 5s = 1 + 2r \\ \text{(III)} & 8 + 5s = 6 - r \end{array}$$

Aus zwei beliebigen Gleichungen werden die beiden Parameter berechnet,
zum Beispiel aus (I) und (II).
Wende dazu ein bekanntes Lösungsverfahren an.

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & 12 + 8s = 1 + r & |\ \cdot 2 \\ \text{(II)} & -7 - 5s = 1 + 2r & |\ \cdot(-1) \end{array}$$

Rechne nach:

$s = -\frac{10}{7}$ und $r = -\frac{3}{7}$

Die berechneten Werte für r und s erfüllen allerdings die dritte Gleichung nicht. Das Gleichungssystem besitzt daher keine Lösung.

$$\text{(III)}\ 8 + 5 \cdot \left(-\frac{10}{7}\right) = 6 - \left(-\frac{3}{7}\right)$$

$$\frac{6}{7} = \frac{45}{7} \quad \text{Widerspruch}$$

Es gibt keinen gemeinsamen Punkt.
Die beiden Geraden sind **windschief**.

Lagebeziehungen von Geraden im Raum

Arbeitsblatt

Gruppe D − Parallele Geraden

a) Jede Gruppe von Expertinnen und Experten bearbeitet eines der Beispiele A, B, C oder D.
b) Anschließend werden die Informationen in Mischgruppen ausgetauscht.
c) Entwerft in der Mischgruppe eine Übersicht, mit welchen Überlegungen die Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden im Raum möglichst rasch untersucht werden können. Haltet die Vorgangsweise auf einem Plakat fest.

Allgemeine Überlegungen:

- Die Richtungsvektoren der beiden Geraden geben einen Hinweis, ob die Geraden schneidend oder windschief bzw. parallel oder identisch sind.
- Anschließend wird das Gleichungssystem untersucht.
- Falls zwei Geraden einen Schnittpunkt besitzen, gibt es für jede Gerade einen eindeutigen Parameterwert, wobei die beiden Parameterwerte im Allgemeinen unterschiedlich sind. Außerdem müssen jeweils die x-, y- und z-Komponenten der beiden Gleichungen übereinstimmen.

Zeige, dass die beiden Geraden g_2: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und g_4: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ parallel sind.

Schritt 1: Vergleiche die Richtungsvektoren.
Die Richtungsvektoren sind parallel, daher sind die Geraden parallel oder identisch.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist Vielfaches von $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Schritt 2: Überprüfe die Lage der Geraden.
Die beiden Geraden sind identisch, wenn außerdem ein Punkt der Geraden g_4 auch auf der Geraden g_2 liegt.
Dazu wird z. B. der Punkt (1 | 1 | 6) in g_2 eingesetzt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ergeben sich drei Gleichungen mit einer Variablen.

(I) $1 = 1 - t$
(II) $1 = -8 - 2t$
(III) $6 = 6 + t$

Der Parameter t wird in den drei Gleichungen ermittelt.
Da sich für t unterschiedliche Werte ergeben, liegt der eingesetzte Punkt nicht auf der Geraden g_2.

(I) $t = 0$
(II) $t = -4{,}5$
(III) $t = 0$

Es gibt keinen gemeinsamen Punkt.
Die beiden Geraden sind **parallel**.