Herleitung der vektoriellen Flächeninhaltsformel

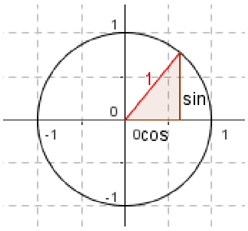
Arbeitsblatt – Lösungen

Für die Herleitung der vektoriellen Flächeninhaltsformel

$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$ sind folgende vier Voraussetzungen wichtig.

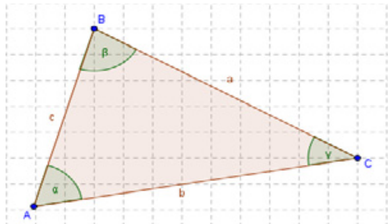
Trigonometrischer Pythagoras

Begründe die Gültigkeit von $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

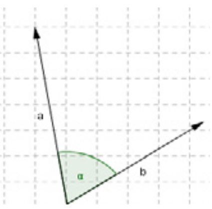


Trigonometrische Flächenformel

Erkläre mit eigenen Worten, wann die trigonometrische Flächenformel $A = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2}$ angewandt werden kann.



Vektor-Winkel-Formel



$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

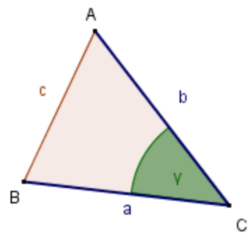
Rechenregeln für Vektoren

Begründe die Gültigkeit der beiden Rechenregeln.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2$$

$$|\vec{a}|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \Rightarrow \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

1 Arbeite die folgende Herleitung durch und ergänze die Lücken im Text.



Ausgangspunkt der Herleitung ist die trigonometrische Flächeninhaltsformel $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$.

a … Länge der Seite a = $|\vec{a}|$, wobei $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$

b … Länge der Seite b = $|\vec{b}|$, wobei $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \gamma$$

$\sin \gamma$ wird aus dem trigonometrischen Pythagoras $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ gewonnen.

$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1 \qquad | -\cos^2 \gamma$

$\sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma \qquad | \sqrt{\ }$

$\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}$$

$\cos^2\gamma$ wird aufgrund der Vektor-Winkel-Formel zu $\cos^2\gamma = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2}$ $\Rightarrow$ $A = \frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sqrt{1-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2}}$

Nun wird 1 unter der Wurzel mit $|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$ erweitert. $\Rightarrow$ $A = \frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sqrt{\frac{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2}}$

Allgemein gilt für alle p, q $\in \mathbb{R}_0^{+}$: $\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sqrt{\frac{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2}} = \frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\frac{\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}}{\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2}}$$

Nun wird im Nenner die Wurzel gezogen. $\Rightarrow$ $A = \frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\frac{\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

Das Kürzen von $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ liefert: $A = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$

Da aber $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$ gilt, folgt: $A = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$

Vektorielle Flächeninhaltsformel
Für den Flächeninhalt eines Dreiecks, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, gilt:

$$A = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$$

Zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks genügt es also, die beiden Vektoren, die das Dreieck aufspannen, zu bestimmen. Die vektorielle Flächenformel gilt im $\mathbb{R}^3$ und im $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{2}$ **Zusammenfassung der Herleitung:**

- Ausgehend von der trigonometrischen Flächenformel für Dreiecke werden die Seiten a und b als Betrag der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgefasst.
- Das Ziel, $\sin\gamma$ mithilfe von Vektoren auszudrücken, erreicht man durch Umformung des trigonometrischen Pythagoras und Anwenden der Vektor-Winkel-Formel.
- Der Wurzelausdruck wird zuerst erweitert, dann durch partielles Wurzelziehen vereinfacht.
- Das Anwenden der Rechenregeln für den Betrag eines Vektors und abschließendes Kürzen führt zur vektoriellen Flächeninhaltsformel.