

Herleitung der vektoriellen Flächeninhaltsformel

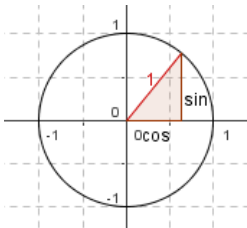
Arbeitsblatt

Für die Herleitung der vektoriellen Flächeninhaltsformel

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 \cdot b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$
 sind folgende vier Voraussetzungen wichtig.

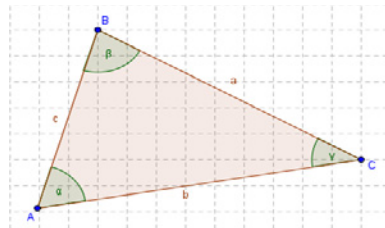
Trigonometrischer Pythagoras

Begründe die Gültigkeit von $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

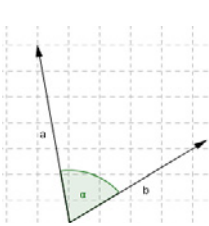


Trigonometrische Flächenformel

Erkläre mit eigenen Worten, wann die trigonometrische Flächenformel $A = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2}$ angewandt werden kann.



Vektor-Winkel-Formel



$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Rechenregeln für Vektoren

Begründe die Gültigkeit der beiden Rechenregeln.

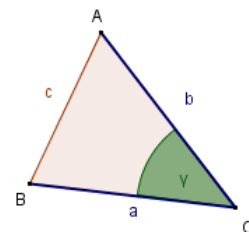
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2$$

$$|\vec{a}|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

- 1) Arbeite die folgende Herleitung durch und ergänze die Lücken im Text.

Ausgangspunkt der Herleitung ist die trigonometrische Flächeninhaltsformel

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma.$$



a ... Länge der Seite a = $\sqrt{\dots}$, wobei $\vec{a} = \dots$

b ... Länge der Seite b = $\sqrt{\dots}$, wobei $\vec{b} = \dots$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \gamma$$

$\sin \gamma$ wird aus dem trigonometrischen Pythagoras $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ gewonnen.

$$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1 \quad | -\cos^2 \gamma$$

$$\sin^2 \gamma = 1 - \dots \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \dots$$

$$\cos^2 \gamma \text{ wird aufgrund der Vektor-Winkel-Formel zu } \cos^2 \gamma = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sqrt{1 - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2}}$$

$$\text{Nun wird 1 unter der Wurzel mit } |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \text{ erweitert. } \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sqrt{\frac{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2}}$$

$$\text{Allgemein gilt für alle } p, q \in \mathbb{R}_0^+: \quad \sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sqrt{\frac{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2}} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \frac{\sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}}{\sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2}}$$

$$\text{Nun wird im Nenner die Wurzel gezogen. } \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \frac{\sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{Das Kürzen von } |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \text{ liefert } A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}.$$

$$\text{Da aber } |\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} \text{ gilt, folgt } A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}.$$

Vektorielle Flächeninhaltsformel

Für den Flächeninhalt eines Dreiecks, das von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird, gilt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

Zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks genügt es also, die beiden Vektoren, die das Dreieck aufspannen, zu bestimmen. Die vektorielle Flächenformel gilt im \mathbb{R}^3 und im \mathbb{R}^2 .

- 2** Fasse nun die wesentlichen Schritte der Herleitung zusammen.