Exkurs: Matrizen und Determinanten

Arbeitsblatt

Eine **Matrix** (Plural: Matrizen) ist eine Tabelle von Zahlen, mit der gerechnet werden kann. Matrizen können unter bestimmten Voraussetzungen addiert, subtrahiert oder multipliziert werden. Mit Matrizen können beliebig große lineare Gleichungssysteme beschrieben und gelöst werden.
Der Begriff *Matrix* stammt von Joseph Sylvester, einem englischen Mathematiker des 19. Jahrhunderts.
In diesem Exkurs lernst du Matrizen kennen, um eine weitere Flächeninhaltsformel für Parallelogramme und Dreiecke herleiten zu können.

Definition

Hauptdiagonale

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Nebendiagonale

Ein quadratisches Zahlenschema der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ heißt **2 × 2-Matrix** (sprich: „2 mal 2 Matrix“).
Die Elemente a und d liegen in der **Hauptdiagonale**.
Die Elemente c und b liegen in der **Nebendiagonale**.

Die **Determinante** der 2 × 2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ wird mit $\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ bezeichnet und ist gleich der Zahl $\mathbf{a \cdot d - c \cdot b}$.

Rechenregel: Multipliziere die Elemente der Hauptdiagonale und subtrahiere das Produkt der Elemente der Nebendiagonale („Hauptdiagonale minus Nebendiagonale“).

Beispiel:
Berechne die Determinante der quadratischen Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Lösung:
$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-2) \cdot 3 = 5 + 6 = 11$

1 Ermittle die Determinante der quadratischen Matrix.

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 13 & 10 \end{pmatrix}$

Mit den folgenden Umformungsschritten und dem neuen Wissen über Determinanten entwickelt man die vektorielle Flächeninhaltsformel in *Koordinatenform*.

$$A = \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2} \quad \text{mit } \vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$$

$$A = \sqrt{(x_a^2 + y_a^2 + z_a^2) \cdot (x_b^2 + y_b^2 + z_b^2) - (x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b)^2}$$

Berechne bzw. vereinfache den Ausdruck unter der Wurzel (mit einem CAS).

$$A = \sqrt{(y_a z_b - y_b z_a)^2 + (x_a z_b - x_b z_a)^2 + (x_a y_b - x_b y_a)^2}$$

Die einzelnen Klammerausdrücke unter der Wurzel entsprechen Determinanten.

Flächeninhaltsformel des Parallelogramms und des Dreiecks in Koordinatenform

$$A = \sqrt{\begin{vmatrix} y_a & y_b \\ z_a & z_b \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ z_a & z_b \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix}^2} \qquad A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} y_a & y_b \\ z_a & z_b \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ z_a & z_b \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix}^2}$$

Tipp zur Berechnung der Determinanten:

Lass für die erste Determinante die x-Koordinaten weg. $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$

Lass für die zweite Determinante die y-Koordinaten weg. $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$

Lass für die dritte Determinante die z-Koordinaten weg. $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ y_a \end{pmatrix}$

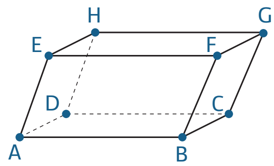
2 Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mithilfe der Koordinatenform.
a) A(1|−1|3), B(−1|1|2), C(2|3|4)
b) A(1|2|3), B(4|2|−1), C(4|−3|−4)

Technologie-Tipp für TI-Nspire: Matrizen und Determinanten (siehe Seite 4)

Aufgaben

3 Berechne den Flächeninhalt der Oberfläche des Quaders ABCDEFGH.
a) A(5|4|9), B(3|8|4), C(−1|6|4), D(1|2|9), E(2|10|15), F(0|14|10), G(−4|12|10), H(−2|8|15)
b) A(5|4|4), B(3|8|−1), C(−1|6|−1), D(1|2|4), E(8|−2|−2), F(6|2|−7), G(2|3|−7), H(4|−4|−2)

4 Von einem Parallelepiped ABCDEFGH, das aus sechs Parallelogrammen besteht, sind vier Eckpunkte gegeben. Berechne die fehlenden Eckpunkte und den Oberflächeninhalt des Parallelepipeds.
a) A(−1|−4|2), B(1|0|0), D(−5|−1|3), E(4|−1|13)
b) C(−4|5|5), F(5|5|15), G(1|8|16), H(−1|4|18)



5 Berechne den Flächeninhalt der Oberfläche der quadratischen Pyramide ABCDS mit der Spitze S.
a) A(0|15|11), B(12|19|5), C(16|25|17), D(4|21|23), S(14|8|18)
b) A(10|10|1), B(14|16|13), C(2|12|19), D(−2|6|7), S(3|17|8)

6 Berechne den Flächeninhalt des dreieckigen Sonnensegels ABC und die Länge der Dreiecksseiten.
A(0|0|0), B(3|−0,5|2), C(−1|4|2,5)

Exkurs: Matrizen und Determinanten

Technologie-Tipp

TI-Nspire

Eine quadratische Matrix erhältst du auf zwei Arten.

1. Möglichkeit:
Wähle im Menü *Werkzeugpalette – Mathematische Vorlagen* bzw. in der Symbolleiste das Symbol .
Du kannst die Größe der Matrix wählen und danach die Werte eintragen.

2. Möglichkeit:
Du kannst die Matrix direkt mittels Eingabezeile eingeben.
Beispiel: `a:=[1,3;-2,5]`
Achte auf die richtige Setzung der Strichpunkte, sie stehen für das Zeilenende.
Für die Berechnung der Determinante gib in die Eingabezeile det(a) ein und berechne mit ENTER.