Summe der unendlichen geometrischen Reihe (Beweis)

Arbeitsblatt

Satz

Eine unendliche geometrische Reihe mit dem Anfangsglied b_1 und dem konstanten Quotienten $q \neq 0$ ist konvergent, falls $-1 < q < 1$ ist. Die unendliche geometrische Reihe hat dann den Grenzwert

$$s = \frac{b_1}{1-q}.$$

In allen anderen Fällen ist die unendliche geometrische Reihe divergent.

Beweis

Begründe die einzelnen Umformungsschritte.

Für die Teilsummen s_n der geometrischen Reihe gilt die Summenformel

$$s_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Was bedeuten b_1 und q?

Für den Beweis werden zwei Fälle unterschieden:

$q \neq 1$ und $q = 1$.

Warum?

1. Fall für $q \neq 1$:

a) $-1 < q < 1$

Falls ein Grenzwert existiert, ergibt er sich aus

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Für $-1 < q < 1$ ergibt $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Warum?
Nenne Beispiele.

Daraus folgt:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} b_1 \cdot \frac{1-\overbrace{q^n}^{0}}{1-q} = b_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{b_1}{1-q}$$

Begründe die Umformungsschritte.

b) $q > 1$ oder $q < -1$

Die Folge $\langle b_n \rangle$ mit $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ ist divergent.
Daher ist auch die geometrische Reihe $\langle s_n \rangle$ für diesen Fall divergent.

Nenne Beispiele.

c) $q = -1$

Die Folge $\langle b_n \rangle$ mit $b_n = b_1 \cdot (-1)^{n-1}$ nimmt abwechselnd die Werte b_1 und $-b_1$ an.
Die Teilsummen der Reihe $\langle s_n \rangle$ nehmen daher abwechselnd die Werte b_1 und 0 an.
Die geometrische Reihe $\langle s_n \rangle$ ist daher für diesen Fall nicht konvergent.

Zeige dies.

2. Fall für $q = 1$:

Die Summenformel kann nicht verwendet werden.

Warum nicht?

Wegen $q = 1$ gilt aber: $s_n = a_1 + a_1 + \ldots + a_1 = n \cdot a_1$

Warum gilt das?

Wegen $a_1 \neq 0$ ist die Folge $\langle s_n \rangle$ in diesem Fall divergent.

Warum?