Die Reihendarstellung der Zahl e

Arbeitsblatt

Die Zahl e kann man durch eine unendliche Reihe darstellen.

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Versuche, die folgenden Schritte nachzuvollziehen. Wenn du unsicher bist, nimm ein Blatt Papier zur Hand und überprüfe die Umformungen.

Auf diese Art kann man e auf jede beliebige Genauigkeit berechnen:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \ldots = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1+1}_{2} + \frac{1}{2}}_{2{,}5} + \frac{1}{6}}_{2{,}66666\ldots} + \frac{1}{24}}_{2{,}708333\ldots} + \frac{1}{120}}_{2{,}71666\ldots} \ldots$$

Anschauliche Herleitung:

Zur Begründung dieser Reihe dient folgende Anwendung des binomischen Satzes (siehe im Kapitel *Potenzen von Polynomen*):

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^n + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot 1^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \binom{n}{3} \cdot 1^{n-3} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot 1^1 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots$$

Durch Herausheben von n aus jeder Klammer im Zähler und Kürzen folgt:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \ldots$$

Lässt man $n \to \infty$ gehen, wächst die Anzahl der Summanden ins Unendliche. Andererseits werden alle Klammern im Zähler der einzelnen Brüche gegen 1 gehen, da die Terme $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \to 0$ konvergieren, wenn n über alle Grenzen wächst.

Insgesamt erhältst du somit:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

Hinweis: Es soll noch darauf hingewiesen werden, dass dies nur eine anschauliche Begründung, aber noch kein mathematisch exakter Beweis ist.