Beweis von Torricelli

Arbeitsblatt

Der italienische Physiker und Mathematiker **Evangelista Torricelli** (1608–1647) fand einen geometrischen Beweis dafür, dass die geometrische Reihe $\langle s_n \rangle$ mit

$$s_n = b + b \cdot q + b \cdot q^2 + b \cdot q^3 + \ldots + b \cdot q^{n-1}$$

für $0 < q < 1$ konvergiert.

Den Beweis führte er anhand folgender Figur:

Voraussetzungen:

$q > 0$

$q < 1$ wegen $b \cdot q < b$

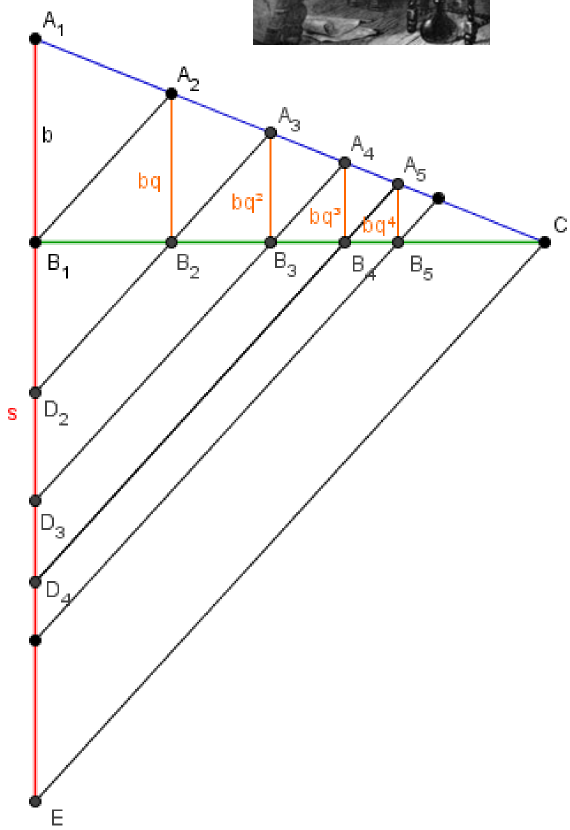
Die Strecken A_2B_2, A_3B_3 usw. sind parallel zu AE.
Die Strecken A_2B_1, A_3D_2 usw. sind parallel zu CE.

Beweisschritte:

a) Zeige, dass die Strecken b, $b \cdot q$, $b \cdot q^2$, $b \cdot q^3$ usw. tatsächlich um den Faktor q verkürzt werden.

b) Zeige, dass die Streckenlänge $\overline{A_1E}$ der unendlichen Summe $s = b + b \cdot q + b \cdot q^2 + b \cdot q^3 + \ldots$ entspricht.

c) Zeige mithilfe von Strahlensätzen, dass $s = \frac{b}{1-q}$ ist.



Beweis:

a) Wegen der Ähnlichkeit der Trapeze $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$ usw. gilt:

$$\overline{A_3B_3} : b \cdot q = b \cdot q : b$$

$$\overline{A_3B_3} = \frac{b \cdot q \cdot b \cdot q}{b}$$

$$\overline{A_3B_3} = b \cdot q^2$$

b) Dem Parallelogramm $B_1A_2B_2D_2$ kann entnommen werden, dass B_1D_2 die Länge $b \cdot q$ hat. D_2D_3 hat die Länge $b \cdot q^2$ usw. Die Strecke A_1E hat die Länge:

$$s = b + b \cdot q + b \cdot q^2 + b \cdot q^3 + \ldots$$

c) Betrachte die Strahlen CA_1 und CB_1. Für die Strecken b, $b \cdot q$, A_1C und A_2C gilt:

$$b \cdot q : b = \overline{A_2C} : \overline{A_1C}$$

Bezeichne A_1C mit Y und A_1A_2 mit Z. Dann ist $\overline{A_2C} = Y - Z$, und es gilt:

$$\begin{aligned} b \cdot q : b &= (Y - Z) : Y \\ q : 1 &= (Y - Z) : Y \\ q &= \frac{Y - Z}{Y} \\ q &= 1 - \frac{Z}{Y} \\ \frac{Z}{Y} &= 1 - q \\ \frac{Y}{Z} &= \frac{1}{1-q} \qquad (1) \end{aligned}$$

Betrachte die Strahlen A_1C und A_1E. Es gilt für die Strecken A_1E, b, A_1C und A_1A_2:

$$\overline{A_1E} : b = \overline{A_1C} : \overline{A_1A_2}$$

Oder mit den Bezeichnungen s, b, Y und Z:

$$\begin{aligned} s : b &= Y : Z \\ s &= b \cdot \frac{Y}{Z} \qquad (2) \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich insgesamt:

$$s = b \cdot \frac{Y}{Z} = b \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{b}{1-q}$$

Somit wurde gezeigt, dass die unendliche Reihe $\langle s_n \rangle$ gegen eine reelle Zahl $s = \frac{b}{1-q}$ konvergiert.