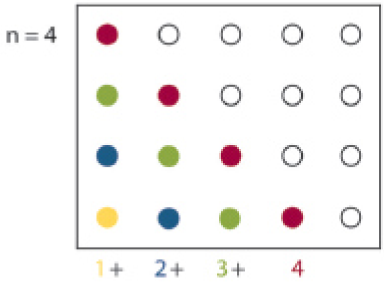
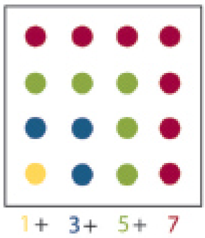
Aufgaben zu endlichen Reihen

Arbeitsblatt

1 Begründe, warum eine arithmetische Reihe vorliegt und überlege mithilfe des Musters eine geeignete Formel für die dargestellte Summe s_4 (n = 4) sowie für beliebiges n.
Bilde die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n.



2 Begründe, warum eine arithmetische Reihe vorliegt und überlege mithilfe des Musters eine geeignete Formel für die dargestellte Summe s_4 (n = 4) sowie für beliebiges n.
Bilde die Summe der n ungeraden Zahlen von 1 bis (2n-1).
Daraus lässt sich ein Satz für die Darstellung von Quadratzahlen formulieren. Wie könnte er lauten?



3 Begründe, warum eine geometrische Folge vorliegt. Schreibe den exakten Wert des ersten und letzten Folgengliedes auf und berechne die Summe aller Folgenglieder mithilfe der Summenformel.

a) $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = 4 \cdot (-1)^n$ für n = 1, ..., 6

b) $\langle f_n \rangle$ mit $f_1 = 20$ und $f_n = f_{n-1} \cdot 1{,}5$ für n = 1, ..., 10

4 Ermittle eine Summenformel für die geometrische Reihe, wenn q = 1 ist.

5 Ein Weizenkorn wird auf das Feld eines Schachbretts gelegt. Auf jedem weiteren Feld wird die Anzahl des vorangegangenen Feldes verdoppelt. Lässt sich die Summe aller Weizenkörner auf dem Schachbrett mit einer Summenformel berechnen?
Wie groß ist die Summe?

6 Beweise die Summenformel der arithmetischen Reihe auf folgende Weise:

- Drücke die Folgenglieder $a_1, a_2, \dots, a_n$ durch a_1 und d aus und schreibe die Summe an.
- Fasse Ausdrücke mit a_1 und Ausdrücke mit d zusammen und hebe d heraus.
- Wende die Summenformel für endliche Reihen an.
- Hebe $\frac{n}{2}$ heraus.
- Zerlege den Klammerausdruck so, dass der Term durch a_1 und a_n ersetzt werden kann.

Aufgaben zu endlichen Reihen

Lösungen

1 Es liegt eine arithmetische Folge mit k = 1 zugrunde.
$s_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
Die diagonal angeordneten Punkte können durch Spiegelung der Punkte und gleichzeitiger Verdoppelung der Anzahl zu einem 4 x 5-Rechteck ergänzt werden.
Daraus ergibt sich die Formel $s_4 = 4 \cdot \frac{5}{2} = 10$
Für beliebige n ergibt sich ein Rechteck mit den Seitenlängen n und n + 1:
$s_n = n \cdot \frac{n+1}{2}$
Die anschaulich gewonnene Formel stimmt mit dem Ergebnis der Summenformel überein.

2 Es liegt eine arithmetische Folge mit der konstanten Differenz 2 zugrunde.
$s_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$
Die Punkte jeder Teilsumme ergeben ein Quadrat mit der Seitenlänge n.
Daraus ergibt sich die Formel $s_4 = 4^2 = 16$.
Für beliebiges n ergibt sich ein Quadrat mit der Seitenlänge n: $s_n = n^2$
Die anschaulich gewonnene Formel stimmt mit dem Ergebnis der Summenformel überein.
Für $a_1 = 1$ und $a_n = 2n - 1$ gilt:
$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot (1 + (2n - 1)) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2n = \frac{1}{2} \cdot 2n^2 = n^2$$
Jede Quadratzahl lässt sich als Summe aufeinanderfolgender ungerader Zahlen darstellen.

3 a) $q = (-1)$; $a_1 = -4$; $a_6 = 4$; $s_6 = 0$ b) $q = 1{,}5$; $f_1 = 20$; $f_{10} = 20 \cdot 1{,}5^9$; $s_{10} \approx 2266{,}60$

4 $q = 1 \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n \Rightarrow s_n = n \cdot a_1$

5 Ja, da eine geometrische Reihe mit q = 2 vorliegt. $s_{64} = 2^{64} - 1 \approx 1{,}8 \cdot 10^{19}$

6 Beweis:
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2 \cdot d) + \ldots + (a_1 + (n-2) \cdot d) + (a_1 + (n-1) \cdot d) =$$
$$= n \cdot a_1 + d \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)) =$$
$$= n \cdot a_1 + d \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{2 \cdot n \cdot a_1}{2} + \frac{d \cdot (n-1) \cdot n}{2} =$$
$$= \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + d \cdot (n-1)) = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_1 + d \cdot (n-1)) = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$