Beschränktes und logistisches Wachstum

Arbeitsblatt

Viele Wachstumsprozesse sind nach oben oder nach unten beschränkt. Das heißt, es gibt eine (obere oder untere) Grenze, die nicht überschritten wird. Als mathematische Modelle stehen dafür beschränktes bzw. logistisches Wachstum zur Verfügung. Dabei kann die Darstellung diskret oder kontinuierlich erfolgen.

Neues Wissen

Beispiel:

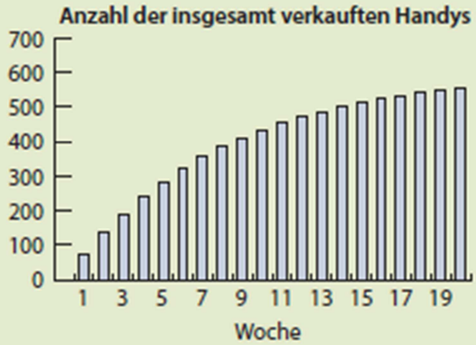
In einer Kleinstadt mit etwa 7000 Einwohnern möchte eine Handelskette, die auch mit Billigsthandys wirbt, eine Filiale eröffnen. Ein Marktforschungsinstitut prognostiziert, dass etwa 600 Personen dieser Kleinstadt für den Kauf eines neuen Handys zu gewinnen sind.
In der ersten Woche werden 72 Handys verkauft, das sind 12 % von 600. Wenn das Marktforschungsinstitut recht behält, dann bleiben noch 528 (= 600 – 72) mögliche Neukunden.
Die Anzahl von 600 nennt man **Sättigungsgrenze**, 528 heißt **Freiraum**, 0 **Startwert**.
Es wird angenommen, dass der prozentuelle Anteil an Neukunden in den Folgewochen gleich bleibt, also 12 % der verbleibenden neuen Kunden ein Handy erwerben.

a) Stelle in einer Tabelle und einem Diagramm den jeweiligen Freiraum und die prognostizierte Anzahl aller verkauften Handys in Abhängigkeit von der Zeit (in Wochen) dar.
b) Die Zunahme kann mithilfe der Rekursionsgleichung $f(n+1) = f(n) + 0{,}12 \cdot [600 - f(n)]$ modelliert werden. Erkläre die Bedeutung von $f(n)$, $f(n+1)$, $[600 - f(n)]$ und 0,12.

Lösung:

a) Am Beginn der zweiten Woche gibt es 528 mögliche Käufer. 12 % davon (also 63) erwerben ein Handy. Insgesamt gibt es nach zwei Wochen 135 verkaufte Handys.

Woche	Freiraum	Insgesamt verkaufte Handys (gerundet)
0		$f(0) = 0$
1	600 – 0	$f(1) = 600 \cdot 0{,}12 = 72$
2	600 – 72	$f(2) = 72 + 0{,}12 \cdot (600 - 72) = 135$
3	600 – 135	$f(3) = 135 + 0{,}12 \cdot (600 - 135) = 191$
4	…	$f(4) = 191 + 0{,}12 \cdot (600 - 191) = 240$
5	…	$f(5) = 240 + 0{,}12 \cdot (600 - 240) = 283$
6	…	$f(6) = \ldots = 321$
7	…	$f(7) = \ldots = 355$



b) $f(n)$ gibt die Anzahl der insgesamt verkauften Handys nach n Wochen an, $f(n+1)$ die Anzahl der verkauften Handys eine Woche später.
Mit $[600 - f(n)]$ wird der Freiraum berechnet, also wie viele pot. Kunden es noch gibt.
12 % vom Freiraum werden durch Multiplikation mit dem Faktor 0,12 berechnet.

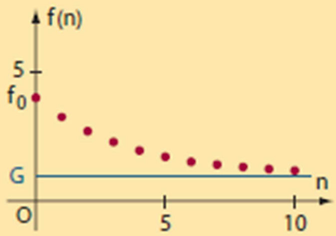
Beschränktes Wachstum

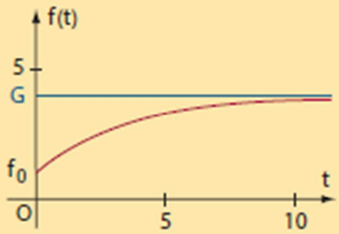
▷ **Beschränktes Wachstum** liegt vor, wenn
- es eine Grenze G gibt und
- Zunahme (Abnahme) demselben prozentuellen Anteil des **Freiraums** $G - f(n)$ entspricht.

▷ **Beschränktes Wachstum** (Zunahme oder Abnahme) kann durch diskrete oder kontinuierliche Modelle beschrieben und mithilfe von Folgen (rekursiv oder explizit) oder Funktionstermen mathematisch modelliert werden.

Die Geradengleichung $y = G$ markiert die Ober- bzw. Untergrenze und ist Asymptote.

$f(n)$	Bestand nach n Zeiteinheiten
$f(0) = f_0$	Startwert
G	Sättigungsgrenze
$G - f(n)$	Freiraum nach n Zeiteinheiten





1 Ein Getränk wird in den Kühlschrank (Temperatur: 4 °C) gestellt und kühlt kontinuierlich ab. Die Temperatur des Getränkes in Abhängigkeit von der Zeit t, kann durch die Funktion $f(t)$ beschrieben werden:
$f(t) = 4 + 20 \cdot 0{,}951^t$ mit t in Minuten und $f(t)$ in °C.

a) Welche Temperatur hat das Getränk, bevor es in den Kühlschrank gestellt wird? Welche Temperatur erreicht es nach 1 Minute im Kühlschrank?

b) Zeige anhand der ersten Minute, dass die Temperatur um 4,9 % des Unterschiedes zwischen Getränketemperatur und Kühlschranktemperatur abnimmt. Wie hängt der Prozentsatz mit dem Wert 0,951 zusammen?

c) Berechne die Temperatur nach 10, 20, 60 und 120 Minuten. Bis zu welcher Temperatur kann das Getränk abgekühlt werden? Begründe mithilfe des Funktionsterms und im gegebenen Zusammenhang.
d) Stelle die Abnahme der Temperatur mit einem elektronischen Tool grafisch dar.

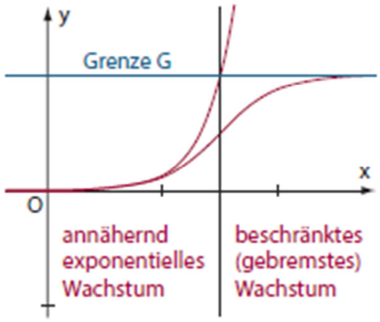
Der belgische Mathematiker Pierre-François Verhulst studierte Bevölkerungsstatistiken und entwickelte ein mathematisches Modell, das auch hemmende Faktoren berücksichtigt. Er stellte die von ihm so genannte *logistische Gleichung* auf. Darauf begründet sich die Bezeichnung *logistisches Wachstum*, das rasch als Modell in der Biologie und Ökonomie Anwendung fand.

Pierre-François Verhulst (1804–1849)

Exponentielle Wachstumsvorgänge werden in der Realität zumeist durch eine **Grenze** gebremst.

Dabei kann es sich um eine Kapazitätsgrenze handeln, wenn beispielsweise ein Lebensraum nur eine bestimmte Anzahl an Individuen zulässt. Sättigungsgrenzen können beschreiben, dass ein Markt nur eine bestimmte Anzahl an Produkten benötigt oder eine Substanz nur in einer bestimmten Höchstkonzentration auftreten kann.

Zunächst kommt die Grenze kaum zum Tragen und das Wachstum erscheint annähernd exponentiell. Im Laufe der Zeit jedoch wird das Wachstum durch den abnehmenden Freiraum gebremst und nähert sich einer Grenze.



Arbeit nach dem Mehrstufigen Verfahren (bis Aufgabe 4)

Lernmethode Mehrstufiges Verfahren

2 Bearbeite in Einzelarbeit eine der beiden Aufgaben A oder B.

Aufgabe A

Die Masse m (in kg) eines aufwachsenden Zwerghasen nimmt in Abhängigkeit von der Zeit t (in Monaten) auf folgende Art zu: $m(t) = \frac{1}{1 + 9 \cdot e^{-0,5t}}$ für $t \geq 0$.

a) Zeichne die Funktion im Intervall [0; 10].
b) Welche Masse hat der Zwerghase mit 4 Monaten?
c) Wann wiegt er 90 dag?
d) Welche Masse erreicht er maximal?

Aufgabe B

Nach n Tagen sind a m^2 der Oberfläche eines Teiches von Algen bedeckt. Der Algenteppich nimmt auf folgende Art zu: $a(0) = 1$; $a(n + 1) = a(n) + 0,06 \cdot a(n) \cdot (10 - a(n))$ für $n \geq 0$

a) Zeichne die Folge für n = 0, 1, 2, …,10 in ein Koordinatensystem.
b) Berechne, welche Fläche der Algenteppich nach 4 Tagen bedeckt.
c) Wann erreicht der Algenteppich eine Größe von 9 m^2?
d) Welche Fläche wird maximal bedeckt?

3 Vergleiche mit einer Partnerin/einem Partner, die/der die jeweils andere Aufgabe bearbeitet hat, die Aufgaben und Lösungswege. Haltet Gemeinsamkeiten und Unterschiede fest.

4 Bildet mit einem anderen Paar eine Gruppe. Beantwortet mithilfe des nachfolgenden Informationstextes die Fragestellungen.

a) Welches mathematische Modell (diskret oder kontinuierlich) wurde bei Aufgabe A bzw. B verwendet?

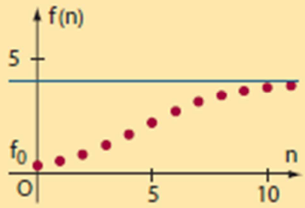
b) Gebt jeweils die Obergrenze G an und zeichnet die Asymptote $f(t) = G$ in euren grafischen Darstellungen ein.

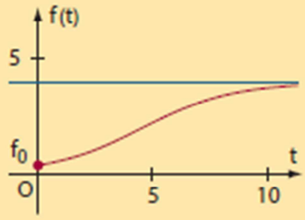
c) Zeigt anhand der Termdarstellung in Aufgabe B, dass der Zuwachs proportional zum momentanen Bestand $a(n)$ und zum Freiraum $[10 - a(n)]$ ist. Gebt den entsprechenden Faktor an.

Logistisches Wachstum

Logistisches Wachstum liegt vor, wenn
- es eine Grenze G gibt und
- **der momentane Zuwachs proportional zum momentanen Bestand und zum Freiraum** ist.

Logistisches Wachstum (Zunahme) kann durch diskrete oder kontinuierliche Modelle beschrieben und mithilfe von Folgen (rekursiv oder explizit) oder Funktionstermen mathematisch modelliert werden. Es wird grafisch durch einen **S-förmigen Verlauf** dargestellt.
Die Geradengleichung $y = G$ markiert die Obergrenze und ist Asymptote.





$f(n)$	Bestand nach n Zeiteinheiten
$f(0) = f_0$	Startwert
G	Sättigungsgrenze, Kapazitätsgrenze (Obergrenze)
$G - f(n)$	Freiraum nach n Zeiteinheiten

5 Ein Mädchen hat bei der Geburt ($t = 0$ bzw. $n = 0$) eine Größe von 50 cm. Im Alter von 16 Jahren wird es seine maximale Größe von 175 cm (beinahe) erreichen.
Für die mathematische Beschreibung werden zwei Modelle angegeben:
(1) $g(n+1) = g(n) + 0{,}003 \cdot g(n) \cdot [175 - g(n)]$ mit $g(0) = 50$ (2) $g(t) = \frac{175}{1 + 2{,}5 \cdot e^{-0{,}524t}}$
Untersucht, wie gut die beiden Modelle zu den Vorgaben passen und vergleicht sie.

Aufgaben

Beschränktes Wachstum

6 2007 erfolgte in Innsbruck und Umgebung die Umstellung von analogem auf digitales Fernsehen. Ein Hersteller von DVB-T-Antennen nahm an, dass etwa 45 000 Haushalte im Bezirk Innsbruck eine DVB-T-Antenne kaufen würden. Für seine Absatzprognose nahm er $f(n+1) = f(n) + 0{,}17 \cdot [45\,000 - f(n)]$ als Modell an.

a) Welcher Wert ist für $f(0)$ anzunehmen? Wie viele Antennen wurden nach einem Monat bzw. nach zwei Monaten insgesamt verkauft?
b) Welcher Wert wurde als Kapazitätsgrenze angenommen? Zeige für $n = 1$ und $n = 2$, dass die Gesamtanzahl verkaufter Antennen jeweils um 17 % des Freiraumes wächst.
c) Stelle das Wachstum für die ersten zwei Jahre grafisch dar.

7 Einem Patienten wird durch eine Dauertropfinfusion eine gleichbleibende Menge eines Medikaments verabreicht, das bis dahin nicht in seinem Körper vorhanden war. Bei diesem Vorgang wird einerseits das Medikament im Blut angereichert, andererseits wird ein Teil wieder über die Nieren ausgeschieden. Insgesamt liegt für die Menge des Medikaments im Blut zum Zeitpunkt t ein beschränktes Wachstum vor.
Die Funktion f mit $f(t) = 80 - 80 \cdot (1 - 0{,}0475)^t$ beschreibt die Menge f (in mg) eines bestimmten Medikamentes nach t Minuten im Blut.
a) Untersuche die getroffenen Modellannahmen: Art des Wachstums, Wahl des mathematischen Modells, Sättigungsgrenze und Startwert.
b) Wie viel mg des Medikamentes sind nach einer Minute im Blut? Stelle die angereicherte Menge des Medikamentes für die ersten 30 Minuten grafisch dar.
c) Berechne den Freiraum nach 10, 20 und 30 Minuten Dauertropfinfusion.

Logistisches Wachstum

8 In einer Stadt wird im Laufe einer Grippeepidemie die Anzahl aller bis zum jeweiligen Tag infizierten Personen erfasst. Die folgende Tabelle gibt Auskunft über die erfassten Daten.

Tag	0	1	2	3	4	5	10
Personen	10	18	33	60	100	190	2950

Tag	11	12	13	14	15	16	17
Personen	4615	6600	8400	9475	9870	9973	9995

Stelle die Daten grafisch dar und begründe, warum logistisches Wachstum vorliegt. Welcher Wert kann aufgrund der Daten als Obergrenze geschätzt werden?

9 Für logistisches Wachstum mit $f(0) = 5$, $f(1) = 10$ und der Obergrenze $G = 500$ werden zwei Darstellungen angegeben:
(1) $f(n + 1) = f(n) + 0{,}002 \cdot f(n) \cdot [500 - f(n)]$ mit $f(0) = 5$
(2) $f(t) = \frac{500}{1 + 99 \cdot e^{-0{,}703t}}$
Vergleiche die Tabellen und Graphen der beiden Modelle.

10 Ein Computerhersteller hat spezielle Laptops für Menschen über 60 Jahre entwickelt. Die Firma geht für Mitteleuropa zunächst von einem maximalen Absatz von 100 000 Stück aus. Die Anzahl der Personen, die nach t Monaten einen Laptop besitzen, wird durch die Funktion f mit $f(t) = \frac{100\,000}{1 + 99 \cdot e^{-0{,}41t}}$ beschrieben.
a) Mit wie vielen Laptops startet der Verkauf? Wie viele Personen besitzen nach einem Monat bzw. nach zwei Monaten einen Laptop?
b) Begründe, warum logistisches Wachstum angenommen werden kann. Prüfe, ob ein kontinuierliches oder ein diskretes Modell geeignet erscheint.

c) Lege eine Tabelle an und stelle das Wachstum bis t = 20 Monate grafisch dar. Benutze ein elektronisches Tool.
d) Ab wann verlangsamt sich das Wachstum? Woran ist die Verlangsamung erkennbar?
e) Wann ist das Ziel der Firma, 90 % des Marktes abzudecken, erreicht?

11 Öffne das Excel-Arbeitsblatt www Diskretes logistisches Wachstum und experimentiere mit dem Wachstumsfaktor.

Modellbildung: Lineares, exponentielles, beschränktes und logistisches Wachstum

12 Stelle in einer Mindmap *Wachstumsprozesse* die Eigenschaften und typischen Graphen zu linearem, exponentiellem, beschränktem und logistischem Wachstum zusammen.

13 Ein Wanderheuschrecken-Schwarm kann sich pro Generation verzehnfachen – und dies bis zu dreimal im Jahr. Der bisher größte registrierte Heuschreckenschwarm bedeckte 1784 in Südafrika geschätzte 3000 km² Land und umfasste über 300 Milliarden Insekten[1].

a) Stelle eine geeignete Modellgleichung auf, die die Anzahl der Heuschrecken in Abhängigkeit von der Zahl der Generationen beschreibt.
b) Wie lange dauerte es, bis der Schwarm von 3000 auf 300 Milliarden Tiere anwuchs?

14 Seit Jahrtausenden wird Sauerteig zur Herstellung von Brotteig verwendet. Dabei werden gezielt Bakterien (z. B. Milchsäurebakterien oder Hefebakterien) im Teig vermehrt. Die Vermehrung könnte beispielsweise so ablaufen: Unter bestimmten Bedingungen werden 1 g Mehl (t = 0) etwa 100 Bakterien zugesetzt. Nach 4 Stunden sind etwa 3500 Bakterien vorhanden.
Die Sättigungsgrenze (aufgrund des beschränkten Nährstoffangebotes) liegt bei etwa 7000 Bakterien.

a) Begründe, warum logistisches Wachstum angenommen werden kann.
b) Ermittle für die Anzahl n (t) der Bakterien in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) einen geeigneten Funktionsterm und stelle die Entwicklung grafisch dar.
Verwende $n(t) = \frac{G}{1 + C \cdot e^{-a \cdot t}}$ mit $C = \frac{G}{n(0)} - 1$ und bestimme die Parameter G, C und a.
c) Sauerteig sollte mindestens 8 Stunden reifen. Wie viele Bakterien sind zu diesem Zeitpunkt im Sauerteig vorhanden?

15 Entwicklung der Weltbevölkerung (Quellen: UNO 2006 und U.S. Census Bureau)[2]

Jahr	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Bev. in Mrd.	1,65	1,75	1,86	2,07	2,30	2,54	3,03	3,70	4,45	5,29	6,12	6,9

a) Stelle die Daten grafisch dar und untersuche die absoluten und relativen Änderungen bezogen auf 10-Jahres-Intervalle.
b) In welchem Zeitraum verläuft die Entwicklung annähernd linear? Begründe. Gib eine Modellgleichung für diesen Zeitraum an.

[1] Quelle: entwicklung & ländlicher raum 3/2005.
[2] Aktueller Stand der Weltbevölkerung auf **http://www.census.gov/ipc/** unter Population Clocks

c) Gib eine geeignete Modellgleichung für den Zeitraum 1900 bis 2010 an. Um wie viel Prozent wächst die Weltbevölkerung durchschnittlich in diesem Zeitraum pro Jahr?

16 Weltrekorde im 100-m-Sprint der Männer[1]:

Jahr n	1912	1921	1930	1936	1956	1960	1968	1983
Zeit t (in s)	10,6	10,4	10,3	10,2	10,1	10,0	9,95	9,93

Jahr n	1988	1991	1994	1996	1999	2005	2007	?
Zeit t (in s)	9,92	9,86	9,85	9,84	9,79	9,77	9,74	

Verwende das Excel-Arbeitsblatt www Sprint.

a) Stelle mithilfe der gegebenen Daten eine Modellgleichung auf. Schätze die notwendigen Parameter. Wann wird nach deinem Modell eine Zeit von 9,70 s erreicht?

b) Im Jahr 2006 berechnete **John Einmahl**, ein niederländischer Universitätsprofessor, dass der Weltrekord für den 100-m-Sprint der Männer auf 9,29 Sekunden verbessert werden könnte. Ist dies nach deinem Modell möglich?
Wie könnte das Modell verändert werden, um diese Prognose zu erfassen? Wann wäre es so weit?

Usain Bolt, 2009

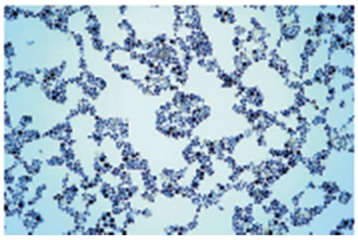
17 Im Jahr 1913 untersuchte der schwedische Biologe **T. Carlson**[2] das Wachstum von Hefekulturen. Es zeigte sich, dass auch dem Wachstum von Hefebakterien in der Realität Grenzen gesetzt sind. Er erhielt folgende Werte.

t (in Std.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N (t) (in mg)	10	18	29	47	71	119	175	257	351	441

t (in Std.)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
N (t) (in mg)	513	560	595	629	641	651	656	660	662

a) Stelle die Daten grafisch dar. Welches Wachstumsmodell ist geeignet? Warum?

b) Öffne das Arbeitsblatt www Wachstum einer Hefekultur und experimentiere mit den Parametern. Ermittle eine geeignete Modellgleichung für die gegebenen Daten.



18 In einer Stadt mit 40 000 Einwohnern breitet sich ein Gerücht aus. Zu einem bestimmten Zeitpunkt ist dieses Gerücht schon 20 000 Einwohnern bekannt. Stündlich erfahren das Gerücht 60 % jener, die das Gerücht noch nicht kennen. Wann kennen 99 % der Einwohner das Gerücht?

[1] Ab 1968 elektronische Zeitmessung; Stand Juni 2008
[2] Daten nach: mathematik lehren, Heft 97/1999.

19 Die Entwicklung einer Population von Wölfen in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) wird durch die Funktion *p* mit $p(t) = \frac{10\,000}{1+9\cdot e^{-0{,}157\cdot t}}$ beschrieben.

a) Stelle die Funktion *p* für das Zeitintervall [0; 40] grafisch dar. Um welches Wachstumsmodell handelt es sich? Beschreibe die Entwicklung in Worten.
b) Wie viele Wölfe sind zum Zeitpunkt t = 0 vorhanden?
c) Um wie viele Tiere wächst die Population im ersten Jahr?
d) Nach welcher Zeit hat sich der Bestand verdoppelt?
e) Wie lange dauert es, bis die Population von 2000 auf 4000 Blauwale anwächst?
f) In welchem Jahr ist die jährliche Zunahme am größten?
g) Welche Kapazitätsgrenze (Obergrenze) ist in diesem Modell angenommen worden? Begründe mithilfe des Graphen sowie mithilfe des Funktionsterms von *p*.
h) Wann sind 90 % der Kapazität erreicht?

Beschränktes und logistisches Wachstum

Lösungen

Die Ergebnisse hängen fallweise von der Modellbildung und den verwendeten Parametern ab.

1

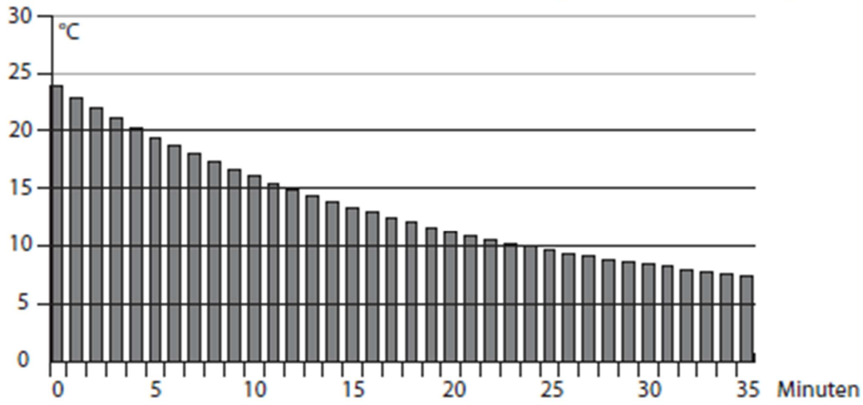
a) $f(0) = 24$, $f(1) = 23{,}02$: 24°C bzw. rund 23°C

b) $f(1) - f(0) = 0{,}98$; $0{,}049 \cdot (24 - 4) = 0{,}98$; $0{,}951 = 1 - 0{,}049$

c) $f(10) \approx 16{,}10$; $f(20) \approx 11{,}32$; $f(60) \approx 4{,}98$; $f(120) \approx 4{,}05$

$\lim\limits_{t \to \infty} (4 + 20 \cdot 0{,}951^t) = 4$ wegen $\lim\limits_{t \to \infty} 0{,}951^t = 0$

Das Getränk kann nur bis zur Kühlschranktemperatur von 4 °C abgekühlt werden.

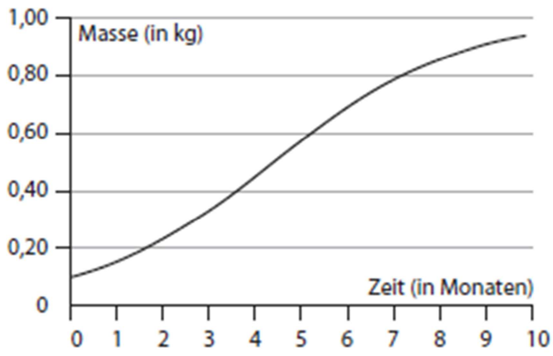


2

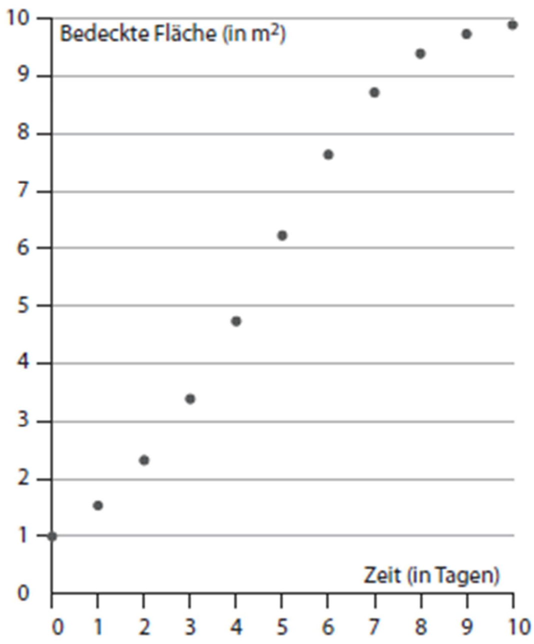
A) b) 0,45 kg — c) 8,8 Monate — d) Ca. 1 kg

B) b) $a(4) = 4{,}7\,m^2$ — c) Im Laufe des 8. Tages — d) Ca. $10\,m^2$

Zu A)



Zu B)

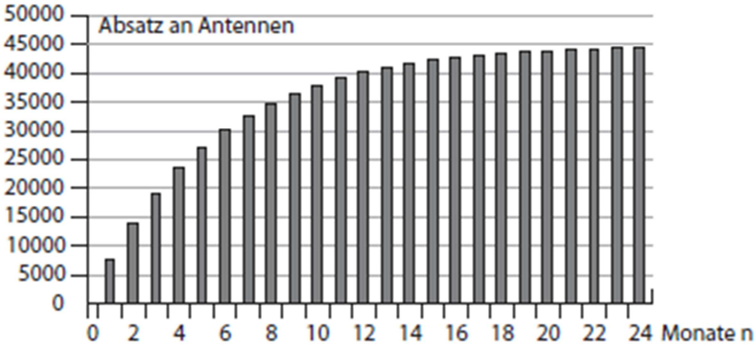


3 Gemeinsamkeiten: S-förmiger Kurvenverlauf; gebremstes (beschränktes Wachstum durch Obergrenze); anfänglich annähernd exponentielles Wachstum
Unterschiede: Anfangswerte und Obergrenze verschieden

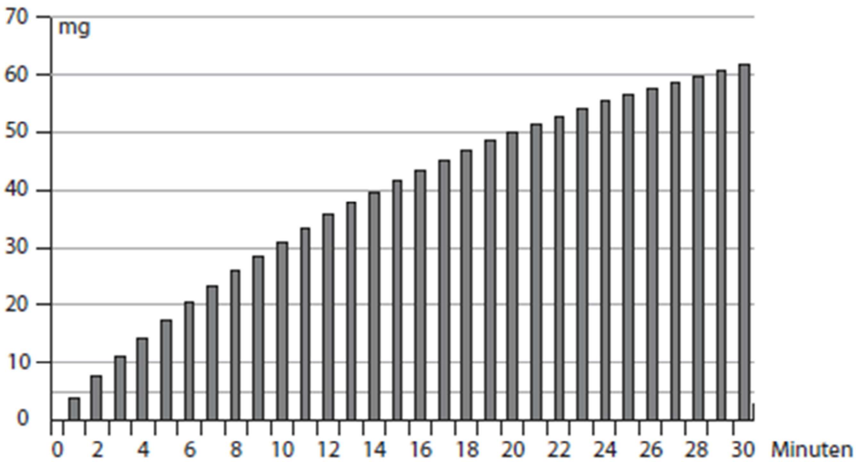
4 a) A – Kontinuierliches Wachstumsmodell, B – Diskretes Wachstumsmodell
b) A – Obergrenze $G = 1$, B – Obergrenze $G = 10$
c) B – Zuwachs: $a(n+1) - a(n) = 0{,}06 \cdot a(n) \cdot [10 - a(n)]$; Proportionalitätsfaktor: 0,06

5 Modell 1: $g(0) = 50$ wird als Startwert vorgegeben; $g(16) \approx 174{,}96$
Modell 2: $g(0) = 50$; $g(16) \approx 174{,}9$
Die Werte passen in beiden Fällen zu den Vorgaben. (1) ist ein diskretes Modell, das nur für ganze Jahre Werte liefert. (2) ist ein kontinuierliches Modell, das dem Wachstumsprozess eines Menschen besser entspricht.

6 a) $f(0) = 0$; $f(1) = 7650$; $f(2) = 14\,000$
b) Kapazitätsgrenze $G = 45\,000$; im ersten Monat: Freiraum $45\,000 - f(0) = 45\,000$; Zuwachs $f(1) - f(0) = 7650$ bzw. $0{,}17 \cdot 45\,000 = 7650$; im zweiten Monat: Freiraum $45\,000 - f(1) = 37\,350$; Zuwachs $f(2) - f(1) \approx 6350$ bzw. $0{,}17 \cdot 37\,350 \approx 6350$
c) grafische Darstellung für 24 Monate



7 a) Beschränktes Wachstum, kontinuierliches Modell, Sättigungsgrenze $G = 80$, Startwert $f(0) = 0$
b) $f(1) = 3{,}8$. Nach einer Minute sind 3,8 mg des Medikamentes im Blut.

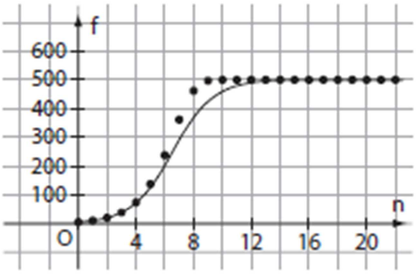


c) $f(10) \approx 31$; $f(20) \approx 50$; $f(30) \approx 61$. Der Freiraum beträgt daher etwa 49, 30 bzw. 19 mg.

8 a) S-förmiger Kurvenverlauf; Obergrenze: etwa 10 000 Infizierte
b) $a(0) = 10$ und $a(n+1) = a(n) + 0{,}00008 \cdot a(n) \cdot (10\,000 - a(n))$

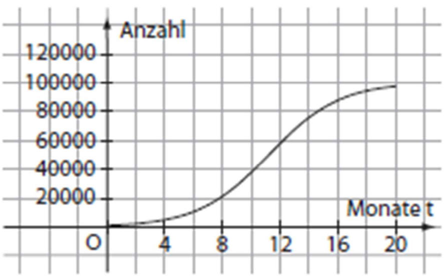
9 Das kontinuierliche Modell wächst langsamer als das diskrete.

n bzw. t	0	1	2	3	4	5	10	15
f(n)	5	10	20	39	74	138	500	500
f(t)	5	10	20	38	72	127	460	499



10 a) $f(0) = 1000$; $f(1) = 1499$; $f(2) = 2242$
b) Exponentielles Wachstum zu Beginn möglich, dann Übergang zu beschränktem Wachstum, da eine Obergrenze angenommen werden muss. Für das kontinuierliche Modell spricht, dass der Kauf der Laptops nicht in Monatssprüngen erfolgt. Aber auch ein diskretes Modell ist gut geeignet, wenn z. B. monatliche Verkaufszahlen betrachtet werden.
c)

Monat t	0	1	2	3	5	10	15	20
Anzahl f(t)	1000	1499	2242	3340	7276	37 868	82 562	97 353



d) Nach 12 Monaten verlangsamt sich das Wachstum. Der Graph wird wieder flacher.
e) 90 % des Marktes: 90 000 Laptops. Nach 17 Monaten haben mehr als 90 % der potenziellen Kunden einen Laptop. $f(17) = 91\,489$.

11 –

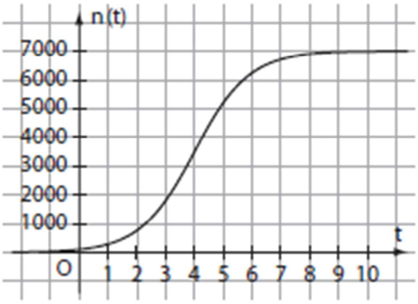
12 Mindmap

13 a) $n(t) = n_0 \cdot 10^t$ oder $n(t+1) = n(t) \cdot 10$ b) $n(9) = 300$ Mrd., d. h. nach 3 Jahren

14 a) Zunächst ungebremstes exponentielles Bakterienwachstum, dann wegen begrenztem Nährstoffangebot gebremstes Wachstum

b) $n(t) = \frac{7000}{1 + 69 \cdot e^{-1{,}0585\,t}}$

c) $n(8) \approx 6900$



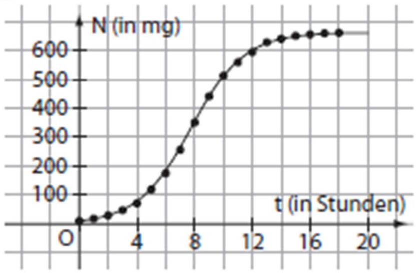
15 a) Die absoluten Änderungen (bezogen auf 10 Jahre) schwanken zwischen 0,1 und 0,84 Milliarden.
Die relativen Änderungen (bezogen auf 10 Jahre) liegen zwischen 0,06 und 0,22.

b) Z.B. 1970 bis 2010: Die absoluten Änderungen sind annähernd gleich (rund 0,8 Mrd).
$f(t) = 3{,}70 + 0{,}80 \cdot (t - 1970)$ bzw. $f(n+1) = f(n) + 0{,}80$ und $f(1970) = 3{,}70$

c) Modellannahme: exponentielles Wachstum mit $f(1900) = 1{,}65$ als Startwert;
z.B. aus $f(2000) = 6{,}12 \Rightarrow k \approx 0{,}01311$; $f(t) = 1{,}65 \cdot e^{0{,}0131 \cdot (t - 1900)}$
$e^{0{,}01311} \approx 1{,}0132 \Rightarrow$ Wachstum pro Jahr: ca. 1,32 %

16 a) Lineares Modell (explizit):
z. B. $T(n)=10{,}6 - 0{,}01 \cdot (n - 1912)$
$T(n) = 9{,}70 \Rightarrow n \approx 2002$
Exponentielles Modell (rekursiv):
z. B. $T(n+1) = T(n) \cdot 0{,}999$ mit $T(1912)=10{,}6$
$T(n) = 9{,}70 \Rightarrow n \approx 2001$
b) Bei den obigen Modellen werden 9,29 s im Jahr 2043 (lineares Modell) bzw. im Jahr 2044 (exponentielles Modell) erreicht.

17 a) Logistisches Wachstum: Die absoluten Änderungen nehmen zunächst zu, ab 8 Stunden jedoch wieder ab. Starke Abflachung gegen Ende.



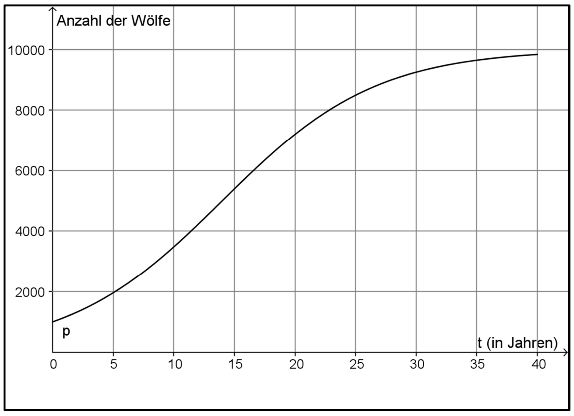
b) Modellgleichung z.B. $N(t) = \frac{662}{1 + 65{,}2 \cdot e^{-0{,}54\,t}}$
für $G = 662$, $N(0) = 10$, $c = 65{,}2$ und $a = 0{,}54$ mit $c = \frac{G}{N(0)} - 1 = \frac{662}{10} - 1 = 65{,}2$

18

begrenztes Wachstum mit G = 40 000, f(0) = 20 000 und q = 0,60; diskretes Modell, rekursiv
$f(n+1) = f(n) + 0{,}6 \cdot (40\,000 - f(n))$ mit $f(0) = 20\,000$
nach 5 Stunden

19

a) logistisches Wachstum, kontinuierliches Modell, explizite Darstellung



Die Population wächst im gesamten Zeitraum. Zunächst wächst sie annähernd exponentiell, dann verlangsamt sich das Wachstum. Am Ende des Zeitraumes ist kaum mehr eine Zunahme vorhanden.
b) 1000 Wölfe
c) um 150 Wölfe
d) im 6. Jahr
e) 6 Jahre
f) im 15. Jahr
g) G = 10 000 Wölfe. Der Graph flacht ab und scheint sich der Geraden g(t) = 10 000 zu nähern.
Werden große Werte für t (z. B. t = 100, 1000, ...) gewählt und in den Funktionsterm p(t) eingesetzt, ergibt sich stets 10 000 als Funktionswert.
Für sehr große Werte für t ergibt der Ausdruck $e^{-0{,}157 \cdot t}$ den Wert 0. Für den Funktionsterm gilt in diesem Fall: $\frac{10\,000}{1+9\cdot 0} = \frac{10\,000}{1} = \mathbf{10\,000}$.
10 000 Wölfe sind daher nach diesem Modell die maximale Anzahl an Tieren.
h) nach 27 Jahren

Bildquellenverzeichnis:
Seite 3 - APA-PictureDesk GmbH, Wien (ONB Bildarchiv)
Seite 6 – Corbis, Berlin (Martin Gallagher)
Seite 7 - Corbis, Berlin (Xinhua Press Liao Yujie)
Corbis, Berlin (Visuals Unlimited)