Die Zahl e ist irrational

Arbeitsblatt

Satz: Die Zahl e ist irrational.

Beweis:
Nimm für diesen indirekten Beweis an, dass die Zahl e durch einen Bruch $\frac{p}{q}$ dargestellt werden kann. Wenn du durch diese Annahme auf einen Widerspruch stößt, kann die Annahme nicht richtig gewesen sein.

Annahme: e ist eine rationale Zahl und lässt sich in der Form $e = \frac{p}{q}$ (mit $p, q \in \mathbb{N}$) darstellen.

Da $2 < e < 3$ ist, und e keine natürliche Zahl ist, muss $q > 1$ sein. *(1)*

$$e = \frac{p}{q} \qquad | \cdot q!$$
$$e \cdot q! = p \cdot [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (q-1)]$$

$e \cdot q!$ ist als Produkt der natürlichen Zahlen $p \cdot [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (q-1)]$ sicher wieder eine natürliche Zahl. *(2)*

Für *e* gilt aber auch auch die sogenannte Reihenentwicklung:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Wenn du diesen Ausdruck für e einsetzt und wie oben mit q! multiplizierst, erhältst du:

$$e \cdot q! = \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\right] \cdot q!$$
$$= \underbrace{q! + q! + (3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot q) + \ldots + (q-1) \cdot q + q + 1}_{\text{natürliche Zahl}} + \underbrace{\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots}_{\text{zwischen 0 und 1}} \qquad (3)$$

In dieser Darstellung für $e \cdot q!$ ist

- der erste Teil als Summe von Produkten von natürlichen Zahlen wiederum eine natürliche Zahl und
- der zweite Teil der Summanden sicher eine positive Zahl zwischen 0 und 1. Mit folgenden Überlegungen lässt sich zeigen, dass ihr Wert kleiner als $\frac{1}{2}$ ist:

Wegen *(1)* ist $q > 1$ und $q \in \mathbb{N}$. D. h. q ist mindestens 2. Daher gilt für die weiteren Summanden der zweiten Teilsumme in *(3)*:

$$\frac{1}{q+1} \le \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{(q+1) \cdot (q+2)} < \frac{1}{3 \cdot 3}$$
$$\frac{1}{(q+1) \cdot (q+2) \cdot (q+3)} < \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3} \qquad \text{usw.}$$

Die Summe $\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots$ muss daher kleiner sein als die Summe der unendlichen geometrischen Reihe $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots$, da $\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots$ ist.

Für die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe gilt: $s=b_1\cdot\frac{1}{1-q}$

Das heißt: $s=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ und somit ist $\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots<\frac{1}{2}$ *(4)*

Folgerung 1:
Aufgrund von *(2)* ist $e\cdot q!$ das Produkt der natürlichen Zahlen $p\cdot[1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(q-1)]$ sicher wieder eine natürliche Zahl.

Folgerung 2:
Aufgrund von *(3)* und *(4)* ist $e\cdot q!$ gleich

$$\underbrace{q!+q!+(3\cdot 4\cdot\ldots\cdot q)+\ldots+(q-1)\cdot q+q+1}_{\text{natürliche Zahl}}+\underbrace{\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots}_{<\frac{1}{2}}$$

Das heißt $e\cdot q!$ ist die Summe aus einer natürlichen Zahl und einer positiven Zahl kleiner $\frac{1}{2}$.

Folgerung 1 und Folgerung 2 widersprechen einander. Somit führt also die ursprüngliche Annahme, dass e eine rationale Zahl ist, auf einen Widerspruch und muss verworfen werden.

e kann nicht als Bruch $\frac{p}{q}$ dargestellt werden und ist somit irrational!