Rechenregeln für konvergente Folgen

Arbeitsblatt

Beim Ermitteln von Grenzwerten konvergenter Folgen werden intuitiv einsichtige Rechenregeln verwendet. Diese Sätze vereinfachen das Rechnen, müssen aber – streng mathematisch gesehen – auch bewiesen werden.

Anmerkung:
Beim Beweis von Grenzwertaussagen kann stets $0 < \varepsilon < 1$ vorausgesetzt werden. Wird ein Beweis nämlich für ein „kleines" ε (also $\varepsilon < 1$) geführt, dann gilt er automatisch auch für jedes größere ε. Diese Voraussetzung ist bei Satz 3 von Bedeutung.

Grenzwertsätze über Nullfolgen

Satz 1: Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0$.

Voraussetzungen:
Eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ wird gewählt.
Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt die Ungleichung $|a_n - 0| < \varepsilon$ von einem bestimmten Index n_ε an für alle $n > n_\varepsilon$.
Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ gilt die Ungleichung $|b_n - 0| < \varepsilon$ von einem bestimmten Index m_ε an für alle $n > m_\varepsilon$.

Für den Beweis wird die Dreiecksungleichung verwendet.

$$|a + b| \le |a| + |b| \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

Beweis:
Eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ wird gewählt.
Wegen der Voraussetzung gibt es einen Index $n_{\varepsilon/2}$, sodass die Ungleichung $|a_n| < \varepsilon/2$ für alle $n > n_{\varepsilon/2}$ gilt.
Ebenso gibt es einen Index $m_{\varepsilon/2}$, sodass die Ungleichung $|b_n| < \varepsilon/2$ für alle $n > m_{\varepsilon/2}$ gilt.
Wegen der Dreiecksungleichung gilt für alle Folgenglieder a_n und b_n:

$$|a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n| \qquad (1)$$

Sei k der größere der beiden Indizes $n_{\varepsilon/2}$ und $m_{\varepsilon/2}$.
Dann gilt für alle $n > k$: $\quad |a_n| + |b_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$
Also $\quad |a_n| + |b_n| < \varepsilon \qquad (2)$
Aus (1) und (2) folgt für alle $n > k$: $\quad |a_n + b_n| < \varepsilon$
Somit gibt es einen Index k, ab dem alle Folgenglieder der Folge $\langle a_n + b_n\rangle$ innerhalb der ε-Umgebung liegen. $\langle a_n + b_n\rangle$ ist eine Nullfolge.

Satz 2: Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$.

Da die Dreiecksungleichung für alle reellen Zahlen gilt, kann b durch (– b) ersetzt werden. Es gilt daher: $\quad |a - b| \le |a| + |b|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$

Beweis (wie zu Satz 1):
Eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ wird gewählt.
Es gibt einen Index $n_{\varepsilon/2}$, sodass die Ungleichung $|a_n| < \varepsilon/2$ für alle $n > n_{\varepsilon/2}$ gilt.
Ebenso gibt es einen Index $m_{\varepsilon/2}$, sodass die Ungleichung $|b_n| < \varepsilon/2$ für alle $n > m_{\varepsilon/2}$ gilt.
Wegen der Dreiecksungleichung gilt für alle Folgenglieder a_n und b_n:

$$|a_n - b_n| \le |a_n| + |b_n| \qquad (1)$$

Sei k der größere der beiden Indizes $n_{\varepsilon/2}$ und $m_{\varepsilon/2}$.
Dann gilt für alle $n > k$: $|a_n| + |b_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$
Also $|a_n| + |b_n| < \varepsilon$ *(2)*
Aus (1) und (2) folgt für alle $n > k$: $|a_n - b_n| < \varepsilon$
Somit gibt es einen Index k, ab dem alle Folgenglieder der Folge $\langle a_n - b_n \rangle$ innerhalb der ε-Umgebung liegen. $\langle a_n - b_n \rangle$ ist eine Nullfolge.

Satz 3: Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

Es gilt: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$

Beweis:

Eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ wird gewählt.
Es gibt einen Index n_ε, sodass die Ungleichung $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$ gilt.
Ebenso gibt es einen Index m_ε, sodass die Ungleichung $|b_n| < \varepsilon$ für alle $n > m_\varepsilon$ gilt.
Für alle Folgenglieder a_n und b_n gilt:

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \qquad (1)$$

Sei k der größere der beiden Indizes $n_{\varepsilon/2}$ und $m_{\varepsilon/2}$.
Dann gilt für alle $n > k$: $|a_n| \cdot |b_n| < \varepsilon \cdot \varepsilon$
Also $|a_n| \cdot |b_n| < \varepsilon^2$
Wenn $\varepsilon < 1$ ist, dann ist $\varepsilon^2 < \varepsilon$.
Also $|a_n| \cdot |b_n| < \varepsilon$ *(2)*
Aus (1) und (2) folgt für alle $n > k$: $|a_n \cdot b_n| < \varepsilon$
Somit gibt es einen Index k, ab dem alle Folgenglieder der Folge $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ innerhalb der ε -Umgebung liegen. $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ ist eine Nullfolge.

Satz 4: Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (k \cdot a_n) = 0$ mit $k \in \mathbb{R}$.

Es gilt: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$

Beweis:
Eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ wird gewählt.
1.Fall: $k \neq 0$

Wegen der Voraussetzung gibt es einen Index n_ε, sodass die Ungleichung

$$|a_n| < \varepsilon/|k| \qquad \text{für alle } n > n_\varepsilon$$

gilt.
Daraus folgt für alle $n > n_\varepsilon$:

$$|k \cdot a_n| = |k| \cdot |a_n| < |k| \cdot \varepsilon/|k|$$

Also $|k \cdot a_n| < \varepsilon$
Somit gibt es einen Index n_ε, ab dem alle Folgenglieder der Folge $\langle k \cdot a_n \rangle$ innerhalb der ε-Umgebung liegen. $\langle k \cdot a_n \rangle$ ist eine Nullfolge.

Im 2. Fall mit $k = 0$ ist die Aussage trivialerweise richtig.

Grenzwertsätze über konvergente Folgen

Satz 5: Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

Voraussetzung:
Wenn a Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$ ist, dann ist die Folge $\langle a_n - a \rangle$ eine Nullfolge.
Wenn b Grenzwert der Folge $\langle b_n \rangle$ ist, dann ist die Folge $\langle b_n - b \rangle$ eine Nullfolge.

Beweis:
Wegen Satz 1 ist die Folge $\langle (a_n - a) + (b_n - b) \rangle$ eine Nullfolge.
Da $(a_n - a) + (b_n - b) = (a_n + b_n) - (a + b)$ gilt, ist auch $\langle (a_n + b_n) - (a + b) \rangle$ Nullfolge.
Deshalb gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

Satz 6: Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$.

Voraussetzung (wie bei Satz 5)

Beweis:
Wegen Satz 2 ist $\langle (a_n - a) - (b_n - b) \rangle$ eine Nullfolge ebenso wie $\langle (a_n - b_n) - (a - b) \rangle$.
Deshalb gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$.

Satz 7: Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (k \cdot a_n) = k \cdot a$ mit $k \in \mathbb{R}$.

Voraussetzung (wie bei Satz 5)

Beweis:
Wenn $\langle a_n - a \rangle$ Nullfolge ist, dann ist wegen Satz 4 auch $\langle k \cdot (a_n - a) \rangle$ bzw. $\langle k \cdot a_n - k \cdot a \rangle$ Nullfolge.
Daher ist $k \cdot a$ Grenzwert der Folge $\langle k \cdot a_n \rangle$.

Satz 8: Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

Voraussetzung (wie bei Satz 5)

Beweis:
Es soll gezeigt werden, dass $\langle a_n \cdot b_n - a \cdot b \rangle$ Nullfolge ist.
Dazu wird der Ausdruck umgeformt: Rechne nach, dass die rechte Seite die linke Seite ergibt.

$$a_n \cdot b_n - a \cdot b = (a_n - a) \cdot (b_n - b) + a \cdot b_n + b \cdot a_n - 2 \cdot a \cdot b$$

Für den Grenzwert gilt daher:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n - ab) = \lim_{n\to\infty} \left[(a_n - a)(b_n - b) + ab_n + ba_n - 2ab \right]$$

Wegen Satz 5 gilt:

$$= \lim_{n\to\infty} \left[(a_n - a)(b_n - b) \right] + \lim_{n\to\infty} (ab_n) + \lim_{n\to\infty} (ba_n) - 2ab$$

Wegen Satz 3 gilt:

$$= \lim_{n\to\infty} (a_n - a) \cdot \lim_{n\to\infty} (b_n - b) + \lim_{n\to\infty} (ab_n) + \lim_{n\to\infty} (ba_n) - 2ab$$

$$= 0 + \lim_{n\to\infty} (ab_n) + \lim_{n\to\infty} (ba_n) - 2ab$$

Wegen der Voraussetzung und Satz 7 gilt:

$$= 0 + ab + ba - 2ab = 0$$

Da $\langle a_n \cdot b_n - a \cdot b \rangle$ Nullfolge ist, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

Satz 9: Ist $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$ mit $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$.

Voraussetzung (wie bei Satz 5)

Beweis:
Es gilt:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} = \frac{1}{|b_n b|} \cdot |b_n - b| \qquad (1)$$

Da $|b_n| > 0$ für alle n gilt, gibt es eine reelle Zahl c mit $0 < c < |b|$,
sodass $|b_n| > c$ für fast alle n gilt.
Daraus folgt:

$$\frac{1}{|b_n b|} < \frac{1}{c \cdot |b|}$$

$$\frac{1}{|b_n b|} \cdot |b_n - b| < \frac{1}{c \cdot |b|} \cdot |b_n - b|$$

Wegen (1) gilt:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{1}{c \cdot |b|} \cdot |b_n - b|$$

Da $\langle |b_n - b| \rangle$ Nullfolge ist, ist wegen Satz 4 auch $\left\langle \frac{1}{c \cdot |b|} \cdot |b_n - b| \right\rangle$ Nullfolge.

Daher ist $\left\langle \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \right\rangle$ Nullfolge und $\frac{1}{b}$ Grenzwert der Folge $\left\langle \frac{1}{b_n} \right\rangle$.

Satz 10: Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ mit $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$.

Beweis:

Es ist $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$.

Nach Satz 8 ist daher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = a \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}$$

(wegen Satz 9)

$$= a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$