Die Existenz des Grenzwerts $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Arbeitsblatt

Mit dem folgenden Beweis soll gezeigt werden, dass der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tatsächlich existiert.

Versuche, die einzelnen Schritte nachzuvollziehen. Wenn du dir unsicher bist, nimm ein Blatt Papier zur Hand und überprüfe die Umformungen.
Teste Aussagen, indem du zum Beispiel Ausdrücke für $n = 1, 2, 3, \ldots$ berechnest.

Es soll a_n die Folge von Partialsummen $a_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ sein.
Diese Folge ist monoton wachsend, da bei jedem nachfolgenden Folgenglied ein positiver Wert addiert wird, d. h. $a_n < a_{n+1}$.

Diese Folge kann nach oben abgeschätzt werden:
Ab $n = 3$ gilt: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n > 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2 = 2^{n-1}$

Daraus folgt $a_n < 1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\text{geometrische Reihe}}$.

Die dabei auftretende geometrische Reihe besitzt die Summe $\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 2$.

Insgesamt ist also $a_n < 1 + 2 = 3$.
Da $a_1 = 2$ und $a_2 = 2{,}5$ sind, gilt ab $n = 2$: $2 < a_n$.
Die Folge a_n ist streng monoton wachsend und nach oben beschränkt und besitzt deshalb einen Grenzwert a, der offensichtlich zwischen 2 und 3 liegt.

Außerdem soll die Folge $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ untersucht werden. Nach dem binomischen Satz ist

$$
\begin{aligned}
b_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^n + \binom{n}{1}\cdot 1^{n-1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot 1^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}\cdot 1^1\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + 1 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!} \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = a_n \qquad (\text{für } n \geq 2;\ \text{für } n = 1 \text{ gilt: } b_1 = a_1 = 2)
\end{aligned}
$$

Die letzte Ungleichung gilt, da alle Klammern im Zähler kleiner als 1 sein müssen.

Damit ist gezeigt, dass $b_n \leq a_n$ (ab $n = 2$ gilt $b_n < a_n$) und somit auch wie a_n nach oben beschränkt ist.

Es muss noch gezeigt werden, dass die Folge b_n monoton wachsend ist, also

$$b_{n+1} > b_n \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{b_{n+1}}{b_n} > 1.$$

Für diesen Schritt des Beweises musst du die **Ungleichung von Bernoulli** verwenden.

Ungleichung von Bernoulli
Für jede reelle Zahl $x > -1$ und jede natürliche Zahl $n \geq 0$ gilt:
$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

Eine Veranschaulichung durch ein dynamisches Arbeitsblatt findest du auf der CD unter Ungleichung von Bernoulli.

Damit folgt:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}} = \frac{(n+1+1)^{n+1}\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot(n+1)^n} = \frac{(n+1+1)^{n+1}\cdot n^n}{(n+1)^{2n+1}}$$

Durch geschicktes Umformen wird im Zähler und Nenner der gemeinsame Exponenten $n + 1$ erzielt:
Zähler und Nenner werden mit $n \cdot (n + 1)$ erweitert.

$$= \frac{n+1}{n}\cdot\frac{(n+2)^{n+1}\cdot n^{n+1}}{(n+1)^{2n+2}} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{[(n+2)\cdot n]^{n+1}}{(n+1)^{2(n+1)}} = \frac{n+1}{n}\cdot\left(\frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{n+1}{n}\cdot\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n}\cdot\left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n}\cdot\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$$

Die Ungleichung von Bernoulli wird angewendet:

$$= \frac{n+1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \underbrace{\geq}_{\text{Ungleichung von Bernoulli}} \frac{n+1}{n}\cdot\left(1-(n+1)\cdot\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$= \frac{n+1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n} - \frac{n+1}{n\cdot(n+1)} = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n} = 1$$

Wenn du nun Anfang und Ende der letzten Umformung nochmals betrachtest, erhältst du insgesamt $\frac{b_{n+1}}{b_n} \geq 1$ oder $b_{n+1} \geq b_n$, d. h. die Folge b_n ist tatsächlich monoton wachsend. Also besitzt b_n einen Grenzwert b, von dem du aber noch nicht weißt, ob er mit dem Grenzwert a von a_n übereinstimmt.

Nun wird gezeigt, dass die beiden Grenzwerte a und b gleich sind.
Da weiter oben schon festgestellt worden ist, dass $b_n \leq a_n$ gilt, muss auch für die Grenzwerte $b \leq a$ gelten.
Es soll nun m (mit $m < n$) eine fest gewählte Zahl sein. Die Teilsumme der ersten $m + 1$ Glieder des Folgenglieds b_n ist

$$1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!}+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{m!} \leq b_n$$

Halte jetzt in Gedanken m fest und lasse n gegen unendlich gehen. Dann nähert sich diese Summe, da in den Klammern alle Terme mit n im Nenner gegen 0 gehen, immer mehr a_m an, während b_n gegen b strebt.
Deshalb muss $a_m \leq b$ und damit auch $a \leq b$ sein.
Aus $b \leq a$ und $a \leq b$ kann nur $a = b$ gefolgert werden. q.e.d.

Zusammenfassung

Du hast nun nachvollziehen können, dass die Folgen a_n mit $a_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ und

b_n mit $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ denselben Grenzwert besitzen, der mit **e** (Euler'sche Zahl) bezeichnet wird.