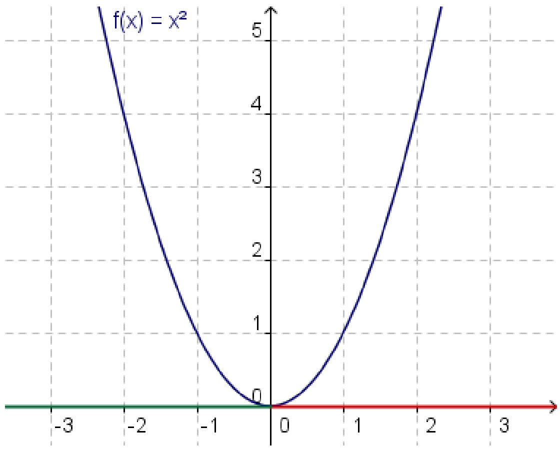
Beweis – Monotonieverhalten

Arbeitsblatt

Betrachtet den Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ und bestimmt die Intervalle, in denen die Funktion streng monoton fallend bzw. streng monoton steigend ist.



Die Grafik zeigt, dass die Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall **]$-\infty$; 0]** streng monoton fallend und im Intervall **[0; ∞[** streng monoton steigend ist.

Für den Beweis werden zwei Fälle unterschieden.

1. Fall:

$f(x) = x^2$ im Intervall]$-\infty$; 0] streng monoton fallend, d. h. $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Im 1. Fall wird gezeigt, dass für alle $x_1 < x_2 < 0$ gilt: $x_1^2 > x_2^2$.

Wird die Ungleichung $x_1 < x_2$ mit x_1 und danach mit x_2 multipliziert, folgt daraus die Ungleichungskette:

$x_1 < x_2 \quad | \cdot x_1$

$x_1^2 > x_2 \cdot x_1$

Beachte x_1 und x_2 sind kleiner als null. Das heißt, das Relationszeichen ändert sich.

$x_1 < x_2 \quad | \cdot x_2$

$x_1 \cdot x_2 > x_2^2$

$$x_1^2 > x_1 \cdot x_2 > x_2^2$$
$$x_1^2 > x_2^2$$

Für den Fall, dass $x_1 < x_2 = 0$, gilt ebenfalls $x_1^2 > x_2^2$.

2. Fall:

$f(x) = x^2$ im Intervall [0; ∞[streng monoton steigend, d. h. $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Im 2. Fall soll gezeigt werden, dass für alle $0 < x_1 < x_2$ gilt: $x_1^2 < x_2^2$.

Wird die Ungleichung $x_1 < x_2$ einmal mit x_1 und danach mit x_2 multipliziert, folgt die Ungleichungskette $x_1^2 < x_1 \cdot x_2 < x_2^2$, aus der $x_1^2 < x_2^2$ geschlossen werden kann.

$x_1 < x_2 \ |\cdot x_1 \qquad x_1 < x_2 \ |\cdot x_2$

$x_1^2 < x_1 \cdot x_2 \qquad x_1 \cdot x_2 < x_2^2$

$$x_1^2 < x_1 \cdot x_2 < x_2^2$$
$$x_1^2 < x_2^2$$

Für den Fall, dass $0 = x_1 < x_2$, gilt ebenfalls $x_1^2 > x_2^2$.