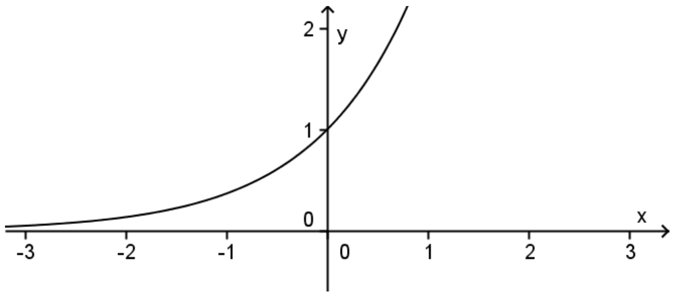
Die Gauß’sche Glockenkurve

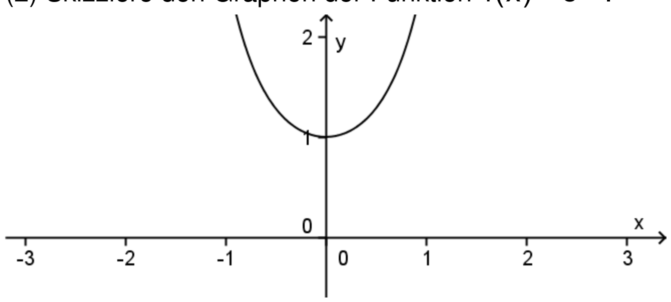
Arbeitsblatt – Lösungen

In der Statistik nimmt die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, die auch als **Gauß’sche Glockenkurve** bezeichnet wird, eine zentrale Rolle ein.
Erarbeite mithilfe dieses Arbeitsblattes, wie sie schrittweise aus der Funktion $f(x) = e^x$ entsteht.

<table>
<tr><th>Funktionsterm und Graph</th><th>Beschreibung des Verlaufs</th></tr>
<tr><td>Zeichne mit einem geeigneten elektronischen Tool den jeweils angegebenen Funktionsgraphen. Wähle für das Koordinatensystem folgenden Ausschnitt:
x-Werte von –3 bis 3 und y-Werte von –0,5 bis 2.
Skizziere den Graphen auf dem Arbeitsblatt.</td><td>Beschreibe in Worten möglichst genau den Verlauf des Funktionsgraphen.
Beantworte die Fragen.</td></tr>
<tr><td>(1) Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = e^x$.
</td><td>Verlauf (Schnittpunkte mit Achsen, Asymptoten, Monotonie):

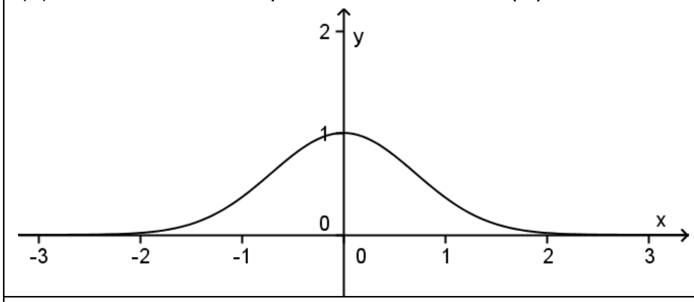
Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt (0 | 1).
Die negative x-Achse ist Asymptote.
Die Funktion ist monoton steigend.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Begründe mithilfe des Funktionsterms, warum die x-Achse Asymptote ist.

Für sehr kleine x (x < 0) wird e^x sehr klein, allerdings nie null.</td></tr>
</table>

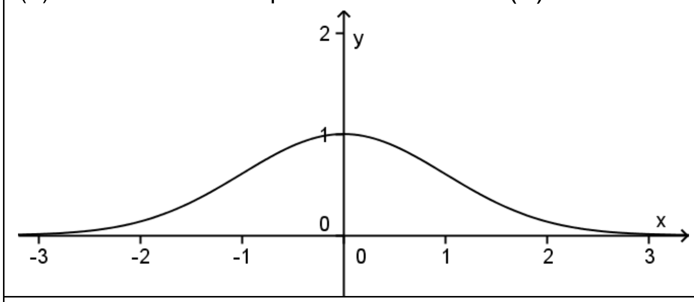
<table>
<tr><td>(2) Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = e^{x^2}$.
</td><td>Verlauf (Schnittpunkte mit Achsen, Symmetrie, Monotonie, Extremum):

Der Graph schneidet die y-Achse im Tiefpunkt (0 | 1).
Der Graph ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.
Die Funktion ist monoton fallend für $x \in]-\infty, 0]$ und monoton steigend für $x \in [0, \infty[$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Begründe mithilfe des Funktionsterms, warum Symmetrie vorliegt.

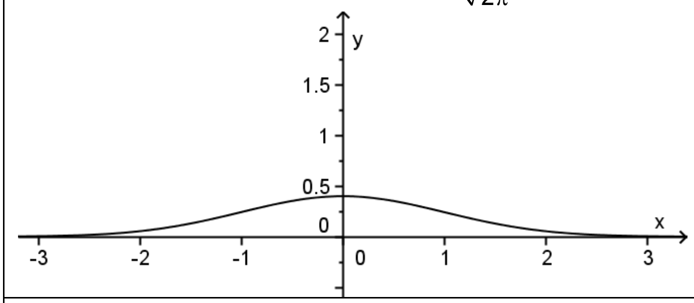
Wegen x^2 im Funktionsterm liegt Symmetrie vor. Dadurch ergeben sich für x und (–x) die gleichen Funktionswerte.</td></tr>
</table>

Funktionsterm und Graph	Beschreibung des Verlaufs
(3) Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = e^{-x^2}$. 	Verlauf (Schnittpunkte mit Achsen, Symmetrie, Asymptoten, Monotonie, Extremum): *Der Graph schneidet die y-Achse im Hochpunkt* $(0\|1)$. *Der Graph ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.* *Die Funktion ist monoton steigend für x* $\in\,]-\infty, 0]$ *und monoton fallend für x* $\in [0, \infty[$.

Begründe die Umformung von $f(x) = e^{-x^2}$ zu $f(x) = \frac{1}{e^{x^2}}$. Begründe mithilfe dieses Terms, warum sich der Funktionsgraph sowohl für kleine als auch große x-Werte der x-Achse nähert.
Eine Potenz mit negativem Vorzeichen im Exponenten kann durch den entsprechenden Kehrwert mit positivem Vorzeichen im Exponenten angeschrieben werden.
Für sehr kleine bzw. sehr große x-Werte wird der Nenner des Bruches sehr groß und der Bruch selbst daher sehr klein, aber nie null.

(4) Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. 	Verlauf (Schnittpunkte mit Achsen, Symmetrie, Asymptoten, Monotonie, Extremum): *Der Graph schneidet die y-Achse im Hochpunkt* $(0\|1)$. *Der Graph ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.* *Die Funktion ist monoton steigend für x* $\in\,]-\infty, 0]$ *und monoton fallend für x* $\in [0, \infty[$.

Beschreibe, wie sich die Halbierung des Exponenten auf den Verlauf des Graphen auswirkt.
Die Kurve wird links und rechts von der y-Achse höher.

Skizziere den Graphen der Funktion $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. 	Verlauf (Schnittpunkte mit Achsen, Symmetrie, Asymptoten, Monotonie, Extremum): *Der Graph schneidet die y-Achse im Hochpunkt* $(0\|0{,}4)$. *Der Graph ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.* *Die Funktion ist monoton steigend für x* $\in\,]-\infty, 0]$ *und monoton fallend für x* $\in [0, \infty[$.

Beschreibe, wie sich der Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ auf den Verlauf des Graphen auswirkt.
Die Kurve wird flacher, die Fläche zwischen Kurve und x-Achse kleiner.

Ausblick: In der Wahrscheinlichkeitsrechnung tritt die Gauß'sche Glockenkurve als sogenannte *Dichtefunktion* auf (Stoff der 8. Klasse). Eine wesentliche Eigenschaft von Dichtefunktionen ist, dass Funktionsgraph und x-Achse eine Fläche mit Flächeninhalt 1 einschließen und $f(x) \geq 0$ für alle x gilt.