Herleitung der Iterationsformel für die Regula falsi

Information

Bei der **Regula falsi** wird die **Nullstelle** einer Funktion schrittweise durch das **Schneiden von Sekanten mit der x-Achse** angenähert. Diese Methode wird daher auch als **Sekantennäherungsverfahren** bezeichnet.

1. Schritt: Stelle die Sekante durch die Punkte $(x_1|f(x_1))$ und $(x_2|f(x_2))$ auf.

Die Steigung der Sekante ist

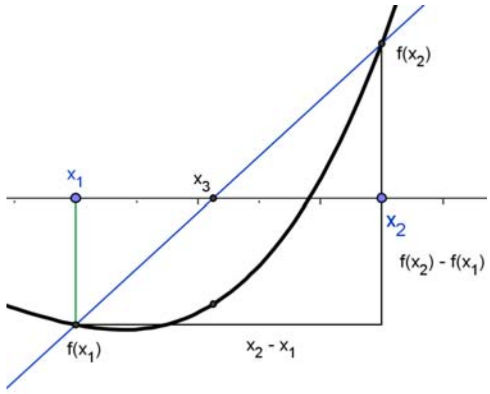
$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Wenn du den Punkt $(x_1|f(x_1))$ in eine allgemeine Geradengleichung $y = k \cdot x + d$ mit der entsprechenden Steigung k einsetzt, ergibt sich

$$y = k \cdot x + d$$

$$f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + d$$

$$d = f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$



Die so erhaltenen Werten für k und d der Sekante musst du in die Geradengleichung $y = k \cdot x + d$ einsetzen:

$$y = \underbrace{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}_{k} \cdot x + \underbrace{\left(f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \right)}_{d} = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$ **Gleichung der Sekante**

2. Schritt: Berechne den Schnittpunkt der Sekante mit der x-Achse.

$$0 = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

$$-f(x_1) \cdot (x_2 - x_1) = \left(f(x_2) - f(x_1)\right) \cdot (x - x_1)$$

$$-f(x_1) \cdot \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} = x - x_1$$

$$x = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$$

Der Schnittpunkt der Sekanten mit der x-Achse ergibt einen Näherungswert x_3 für die Nullstelle

$$x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot f(x_1)$$